

ORSAY

N° D'ORDRE : 56

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

CENTRE D'ORSAY

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Jean PRADAL

1^{re} THÈSE. — Traitement autocompatible des interactions
des types ordinaire et d'appariement
pour les noyaux déformés.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 8 Juin 1964 devant la Commission d'examen.

MM. M. JEAN

Président.

B. JANCOVICI

E. ARNOUS

} *Examineurs*

Editions de la Revue d'Optique théorique et instrumentale

3 et 5, boulevard Pasteur — 165, rue de Sèvres

PARIS (15^e)

1964



Digitized by the Internet Archive
in 2026

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

Nom du Candidat : PRADAL

Prénom : Jean

Date de la soutenance : 8 juin 1964

Numéro d'ordre : 56

1

PRADAL (Jean). — Traitement autocompatible des interactions des types ordinaire et d'appariement pour les noyaux déformés. *Paris*, Editions de la Revue d'Optique, 1964, 35 p., 6 fig.

Th. Sc. Phys. Paris, 1964, N° 56

2

PRADAL (Jean). — Traitement autocompatible des interactions des types ordinaire et d'appariement pour les noyaux déformés. *Paris*, Editions de la Revue d'Optique, 1964, 35 p., 6 fig.

Th. Sc. Phys. Paris, 1964, N° 56

3

PRADAL (Jean). — Traitement autocompatible des interactions des types ordinaire et d'appariement pour les noyaux déformés. *Paris*, Editions de la Revue d'Optique, 1964, 35 p., 6 fig.

Th. Sc. Phys. Paris, 1964, N° 56

4

PRADAL (Jean). — Traitement autocompatible des interactions des types ordinaire et d'appariement pour les noyaux déformés. *Paris*, Editions de la Revue d'Optique, 1964, 35 p., 6 fig.

Th. Sc. Phys. Paris, 1964, N° 56

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

CENTRE D'ORSAY

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Jean PRADAL

1^{re} THÈSE. — Traitement autocompatible des interactions
des types ordinaire et d'appariement
pour les noyaux déformés.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 8 Juin 1964 devant la Commission d'examen.

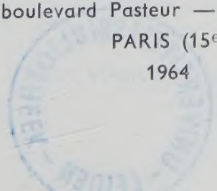
MM. M. JEAN	<i>Président.</i>
B. JANCOVICI	} <i>Examineurs</i>
E. ARNOUS	

Editions de la *Revue d'Optique théorique et instrumentale*

3 et 5, boulevard Pasteur — 165, rue de Sèvres

PARIS (15^e)

1964



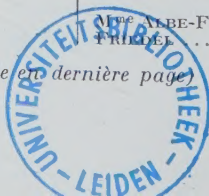
FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

PROFESSEURS

Doyen M. ZAMANSKY

G. JULIA	T Analyse supérieure et algèbre supérieure.	MARECHAL	T Optique théor. et Appli.
PRENANT	T Anatomie et Histologie comparée.	KIRRMANN	T Théories chimiques.
GRASSÉ	T Evolution des êtres organisés.	CHADEFAUD	T Botanique.
PREVOST	T Chimie organique.	M ^{lle} LE BRETON	T Physiol. de la Nutrit.
WYART	T Minéralo. et Cristal.	LELONG	T Application de l'analyse à la géométrie.
TEISSIER	T Zoologie.	DEVILLERS	T Anatomie et Hist. Compar.
MANGENOT	T Biol. Végét. (Orsay).	EHRESMANN	T Topologie Algébrique.
AUGER	T Physique quantique et relativité.	FRANÇON	T Physique (SPCN).
MONNIER	T Physiologie générale.	GLANGEAUD	T Géographie Phys. et Géol.
PIVETEAU	T Paléontologie.	GODEMENT	T Mathématiques (MGP).
ROCARD	T Physique (ENS).	PISOT	T Tech. Math. de la Phys.
CARTAN	T Mathématiques (ENS).	ROCH	T Géologie.
LAFFITTE	T Chimie générale.	SCHATZMANN	T Astrophysique.
FAVARD	T Géométrie supérieure.	TERMIER	T Géologie générale.
COULOMB	T Physique du globe.	ZAMANSKY	T Mathématiques générales.
M ^{lle} COUSIN	T Biol. animale (SPCN).	LENNUIER	T Physique (MGP).
CHRETIEN	T Chimie minérale.	RIZET	T Génétique (Orsay).
DRACH	T Zoologie.	ROUTHIER	T Géologie appliquée.
KASTLER	T Physique (ENS).	M ^{me} TONNELAT	T Physique théorique.
EPHROSSI	T Génétique.	DIXMIER	T Mathématiques (MPC).
RIVIÈRE	T Géol. SPCN et Sédimentologie (Orsay).	SOUCHAY	T Chimie générale.
GAUTHERET	T Biologie Vég. (PCB).	AIGRAIN	T Electrotechnique gén.
LUCAS R.	T Recherches Physiques.	BRUSSET	T Chimie systématique.
THOMAS A.	T Biologie cellulaire.	M. LEVY	T Physique théorique des hautes énergies (Orsay).
ARNULF	T Optique appliquée.	M ^{me} CHAIX	T Chimie biologique.
MORAND	T Physique Enseignement.	M ^{me} HUREL-PY	T Biologie végét. (PCB).
SOLEILLET	T Physique (PCB).	PIAUX	T Chimie (MPC).
FORTIER	T Mécanique Exp. des Fluides.	BRUN	T Mécanique théorique des fluides.
PETIT	T Biologie maritime.	LEDERER	T Chimie biolog. (Orsay).
QUENEY	T Météor. et dynamique atmosphérique.	M ^{me} DUBREIL	T Mathématiques (Agrég.).
GALLIEN	T Embryologie.	M ^{me} LEBLOND	T Mathématiques II (ENS).
EICHORN	T Botanique.	BELLAIR	T Géologie (SPCN).
DE CUGNAC	T Biologie Vég. (SPCN).	COTTE	T Physique électricité.
M ^{lle} CAUCHOIS	T Chimie Physique.	DUBOIS J. E.	T Chimie organique.
THELLIER	T Physique du globe.	LAMOTTE	T Zoologie (ENS).
L'HERITIER	T Biol. générale (Orsay).	MICHEL A.	T Chimie minérale (Orsay).
GRIVET	T Radioélectricité (Orsay).	OLMER	T Energétique générale.
PONCIN	T Mécanique générale.	ROCAULT	T Electricité (Orsay).
DUBREIL	T Arithm. et Théorie des Nombres.	GAUTHIER	T Mécanique appliquée.
QUELET	T Chimie organique.	BARCHWITZ	T Chimie Physique.
CAGNIARD	T Géophysique appliquée.	BROSSEL	T Physique atomique.
CHAMPETIER	T Chimie macromolécul.	BUSER	T Physiologie comparée.
CUVILLIER	T Micropaléontologie.	CAMUS	T Physiologie Vég. Orsay.
JUNG	T Géologie.	CASTAING	T Physique II Thermo (Orsay).
TRILLAT	T Microscopie et diffraction électro.	CURIEN	T Minéralo. et cristallo.
WIEMANN	T Chimie organ. et struc.	MOYSE	T Physiol. Végét. (Orsay).
JACQUINOT	T Spectroscopie et Phys. céleste (Orsay).	NOÏROT	T Evolution des Etres Org.
VASSY	T Physique de l'Atmosph.	PANNETIER	T Chimie générale.
DESTOUCHES	T Théorie Physiques.	POSSOMPS	T Zoologie.
AMIEL	T Chimie générale.	PULLMANN	T Chimie quantique.
HOCART	T Minéralo. et Cristallo.	TEILLAC	T Physique Nucl. et Radioactivité (Orsay).
J. P. MATHIEU	T Physique Optique.	TONNELAT	T Biol. Physico-chim. (Orsay).
COUTEAUX	T Cytologie.	VILLE	T Econométrie.
MAY	T Zoologie (Orsay).	WILLEMART	T Chimie PCB.
CHOQUET	T Théorie des fonctions et Topologie.	DODE	T Chimie (Orsay).
FELDMANN	T Biologie végét. marine.	FREYMAN	T Recherches Physiques.
GUINIER	T Physique des Solides (Orsay).	GUINCHET	T Biol. Vég. SPCN (Orsay).
JUST	T Physiologie comparée.	ROLLET	T Chimie minérale.
FORTET	T Calcul des Probabilités et Phys. mathémat.	M ^{lle} JOSIEN	T Chimie SPCN.
SCHWARTZ	T Calcul diff. et Intégral.	CHEVALLEY	T Géométrie algèb. et théorie des groupes.
CHOUARD	T Physiologie végétale.	ARNOULT	T Electronique (Orsay).
MALAVARD	T Aviation (Tech. Aéron.).	CHAPPELLE	T Physique I (Orsay).
BRELOT	T Calcul diff. et Intégr.	DELANGE	T Mathématiques I (Orsay).
NORMANT	T Synthèse organique.	DENY	T Mathématiques Gén. (Orsay).
BENARD	T Chimie minérale.	GERMAIN	T Mécanique théor. des fluides.
BUVAT	T Botanique (ENS).	LUCAS G.	T Géologie.
DUGUE	T Statistiques Mathém.	ALLARD	T Chimie Physique.
SOULAIRAC	T Psychophysiologie.	BERTHELOT	T Phys. des particules Fondamentales (Orsay).
ULRICH	T Physiol. Vég. Appliq.	BRICARD	T Météor. et Physique de l'Atmosphère.
		M ^{me} ALBE-FESSARD	T Psycho-physiol.
		FRIDEL	T Physique des solides (Orsay).

(suite en dernière page)



TRAITEMENT AUTOCOMPATIBLE DES INTERACTIONS DES TYPES ORDINAIRE ET D'APPARIEMENT POUR LES NOYAUX DÉFORMÉS

PAR

Jean PRADAL

INTRODUCTION

La complexité du problème à N corps et avant tout la méconnaissance de la forme exacte de l'interaction nucléon-nucléon sont les deux principales difficultés dans l'étude de la structure nucléaire. Ces difficultés suffisent à expliquer comment un si grand nombre de modèles phénoménologiques [1] ont pu tour à tour connaître faveur et oubli depuis la découverte du neutron en 1932. Ces modèles peuvent être classés en deux groupes : d'une part, les modèles à particules indépendantes dans lesquels les nucléons se meuvent indépendamment les uns des autres dans un champ moyen ; d'autre part, les modèles à interaction forte traitant le noyau comme un ensemble de nucléons fortement couplés. Une synthèse de ces méthodes a pu être réalisée [2] dans le cas de la matière nucléaire infinie. Mais de nombreuses difficultés surgissent lorsqu'on veut appliquer ces formalismes aux noyaux finis. Il n'y a par ailleurs aucune raison de rejeter davantage le modèle des couches que les modèles collectifs, ceux-ci rendant compte de phénomènes que celui-là ne peut expliquer et vice versa.

Certains faits expérimentaux et parmi ceux-ci le saut d'énergie observé dans les spectres des noyaux ont conduit à l'idée d'interactions additionnelles ne pouvant être incorporées dans le champ nucléaire moyen. Considérant que ces interactions résiduelles proviennent de la partie à courte portée de l'interaction à deux corps, on cherchait naturellement à développer les méthodes permettant d'étudier les effets de cette part de l'interaction dans les configurations à un grand nombre de particules.

Telles étaient les préoccupations de nombreux théoriciens s'intéressant à la structure nucléaire lorsque fut développée la nouvelle théorie de la supraconductivité [3 à 5]. Il était alors très suggestif d'utiliser cette méthode [6] pour la description des noyaux, celle-ci pouvant fournir notamment et très simplement une explication du saut d'énergie apparaissant dans les spectres des noyaux pair-pair.

La supraconductivité est produite par des interactions qui conduisent à une corrélation particulièrement forte des particules se trouvant dans des états obtenus l'un de l'autre par renversement du temps. Une telle interaction d'appariement peut, même si elle est faible, donner lieu à d'importants changements dans les propriétés du système. On sait en effet que l'interaction qui cause les propriétés supraconductrices d'un métal est faible comparée aux autres parties de l'interaction coulombienne.

Utilisant le formalisme de la transformation canonique de Bogoliubov et Valatin, Belyaev [7] a pu donner une explication qualitative de la structure des noyaux pair-pair, de la répartition des noyaux sphériques et déformés, etc.

Par ailleurs, il fut possible de donner une première explication des états collectifs des noyaux à couches complètes. La méthode, inspirée de celles utilisées pour rendre compte des états collectifs du gaz d'électrons, fut utilisée par de nombreux auteurs ; citons V. Gillet et N. Vinh-Mau [8 à 10] qui ont étudié les spectres des noyaux ^{12}C , ^{16}O et ^{40}Ca .

La synthèse des deux traitements, l'un rendant compte des propriétés d'appariement, l'autre fournissant une explication des états collectifs pour décrire les noyaux à couches incomplètes a été réalisée par plusieurs auteurs [11 à 13].

La transformation de Bogoliubov généralisée rend compte simultanément du champ moyen et des corrélations de paires. Une bibliographie assez complète sur ce sujet est donnée dans la référence [14].

Au moment d'entreprendre cette étude nous nous trouvions donc en possession d'un outil remarquable ayant fait ses preuves notamment dans l'étude des spectres de noyaux sphériques ayant un nombre magique de neutrons ou de protons [14 à 17]. Ces applications portaient sur un petit nombre de noyaux.

Mais si la valeur de l'outil n'est plus à discuter, il n'en va pas de même pour l'usage qu'on peut en faire. Si l'on se réfère aux considérations précédentes, il semble raisonnable, en première approximation, de faire l'hypothèse que toutes les parties de l'interaction nucléaire qui ne sont pas du type interaction de paires, sont déjà prises en compte par un champ moyen et de considérer comme négligeable la réaction de l'interaction de paires sur le champ nucléaire. Ce champ nucléaire moyen peut théoriquement être obtenu par un calcul autocompatible antérieur du type Hartree-Fock. En général, il est obtenu en ajustant les paramètres à certaines données expérimentales.

De façon à éviter de longs calculs numériques on a le plus souvent fait l'hypothèse d'une interaction constante et on s'est restreint aux états situés aux confins de la surface de Fermi. Plus précisément, les éléments de matrice de l'interaction de paires sont dans cette hypothèse égaux à une constante G :

$$\langle j \ m, j - m \mid W \mid j \ m', j - m' \rangle = G.$$

Ce procédé simple a donné bon nombre de résultats raisonnables. Toutefois, il n'est pas satisfaisant principalement à deux points de vue :

1° les résultats dépendent sans aucun doute du nombre d'états j considérés pour contribuer à la supraconductivité ; cette amputation est tout à fait arbitraire alors que dans une théorie décente elle devrait être obtenue par l'interaction elle-même ;

2° une telle interaction a perdu toute relation avec ce que l'on sait de l'interac-

tion nucléon-nucléon. Or, on se sent, bien entendu, meilleure conscience à expliquer les propriétés de structure nucléaire sur la base d'approches plus ou moins réalistes de l'interaction nucléon-nucléon.

Une première amélioration consista à remplacer l'interaction constante par une interaction δ . On obtient alors une amputation automatique.

Par ailleurs, dans le cas des noyaux lourds, cette interaction semble être une approche raisonnable à l'effet d'une interaction nucléon-nucléon réaliste. Plusieurs calculs ont été faits de cette façon [18].

Si on se tourne vers des forces plus réalistes et si on tient compte d'un nombre de nucléons de plus en plus grand en dehors des couches complètes, il devient alors de moins en moins probable que l'effet de ces interactions sur le champ moyen soit négligeable. Ainsi le phénomène de groupement par paires devrait entrer dans le cadre d'un traitement autocompatible.

Une telle théorie a été développée [13] partant avec la transformation linéaire et unitaire la plus générale des opérateurs de création et d'annihilation

$$b_i^+ = \sum_k (A_i^k a_k^+ + B_i^k a_k),$$

puis déterminant les coefficients de la transformation en imposant la forme particulière à l'hamiltonien transformé :

$$H = \sum_k E_k b_k^+ b_k.$$

Il nous a paru intéressant d'établir tout d'abord un formalisme aussi simple que possible s'inspirant de ces méthodes de façon à pouvoir faire des calculs systématiques sur un grand nombre de noyaux à la fois, comportant aussi bien des neutrons que des protons en dehors des couches complètes. Nous avons abordé le problème par une méthode variationnelle. Celle-ci nous a conduit à des équations comparables à celles de M. Baranger [13], moins générales et partant plus maniables. La recherche de ces équations fait l'objet du chapitre I.

Dans la formulation de la théorie de la supraconductivité, le nombre de particules n'est pas conservé. Seule la valeur moyenne de l'opérateur nombre d'occupation est égale au nombre de particules considéré.

On peut facilement, à partir d'un état de Bardeen, Cooper et Schrieffer (B. C. S.), projeter un état propre de l'opérateur nombre d'occupation. Bayman [19] a montré qu'en partant d'un tel état propre, on est ramené au traitement de B. C. S. tant que l'on évalue les valeurs moyennes par la méthode du col [22]. Une estimation grossière montre que l'on peut faire confiance à cette méthode tant que le nombre des niveaux qui ne sont ni vides ni complètement occupés est grand comparé à l'unité. On sait que cette condition n'est généralement que pauvrement remplie dans les applications de la théorie à la physique nucléaire.

Kerman, Lawson & Macfarlane [20] comparèrent les résultats du modèle de la supraconductivité à ceux d'une diagonalisation exacte prenant, eux aussi, comme hypothèse de travail une interaction d'appariement constante. Ces recherches montrèrent que les résultats du modèle de la supraconductivité étaient en accord avec ceux obtenus par la diagonalisation exacte, même pour des nombres de particules petits.

Entre temps, différents calculs basés sur un modèle d'appariement avaient été

effectués avec des forces plus réalistes telles que force δ [21], mélange de force δ et de force quadrupolaire [21] et forces à portée finie [15, 16, 21]. Pour certains de ces calculs il était tenu compte de l'effet des interactions résiduelles sur le champ de Hartree-Fock. Considérant le nombre croissant des applications possibles du modèle, il nous a semblé intéressant d'étudier de manière plus approfondie les erreurs auxquelles on doit s'attendre du fait de la non-conservation du nombre de particules.

Nous avons donc pensé qu'il serait particulièrement instructif de développer un second formalisme avec conservation du nombre de particules, dans le même esprit que le premier en utilisant les mêmes méthodes et les mêmes notations, et de comparer les résultats obtenus dans les deux cas [30].

L'établissement de ce second formalisme fait l'objet du chapitre II. On y trouvera un critère de validité de la méthode du col, plus rigoureux que dans le travail de Bayman [19].

La discussion enfin des solutions de nos équations variationnelles et une application du premier formalisme à l'étude de la déformation nucléaire dans la région de la table périodique centrée sur les terres rares est donnée dans le chapitre III.

Dans la conclusion il sera fait allusion aux résultats encore incomplets du second formalisme, ainsi qu'aux développements que nous comptons donner à cette étude dans un cadre débordant celui de cette thèse.

I. Le modèle nucléaire d'appariement sans conservation du nombre de particules

1. Dérivation des équations d'Euler-Lagrange correspondant à un état de B. C. S. — L'hamiltonien d'un système composé d'une seule sorte de nucléons interagissants peut s'écrire de la façon suivante, avec les notations usuelles de la seconde quantification :

$$(I.1) \quad \mathcal{H} = H - \lambda N = \sum_{jm} (\epsilon_{jm} - \lambda) a_{jm}^+ a_{jm} + \sum_{\substack{\text{tous } j \\ \text{tous } m}} \mathcal{V}_{j_1 m_1 j_2 m_2 j_3 m_3 j_4 m_4} a_{j_1 m_1}^+ a_{j_2 m_2}^+ a_{j_3 m_3} a_{j_4 m_4},$$

a_{jm}^+ , a_{jm} étant les opérateurs de création et d'annihilation correspondant à un état bien défini (jm) du modèle des couches, ϵ_{jm} les énergies attachées à une particule supposées contenir déjà une partie de l'interaction nucléaire, $\mathcal{V}_{j_1 m_1 \dots j_4 m_4}$ les interactions résiduelles et λ le potentiel chimique ajusté de telle sorte que la valeur moyenne de l'opérateur nombre d'occupation soit égal au nombre de nucléons N mis en jeu dans le problème étudié.

L'équation suivante donne cette condition :

$$(I.2) \quad \langle \psi | \sum_{jm} a_{jm}^+ a_{jm} | \psi \rangle = N.$$

Comme fonction d'essai ψ , nous utilisons la fonction usuelle de B. C. S. mais écrite avec de nouveaux opérateurs b_{km}^+ obtenus à partir des opérateurs originaux par une transformation linéaire (I.5) :

$$(I.3) \quad \psi = \prod_{k, m > 0} (U_{km} + V_{km} b_{km}^+ b_{k, -m}^+) \Phi_0 :$$

Φ_0 représente le vide de quasi-particules :

$$(I.4) \quad b_{km} \Phi_0 = 0, \quad \Phi_0 b_{km}^+ = 0.$$

La transformation linéaire est la suivante :

$$(I.5) \quad b_{km}^+ = \sum_j D_j^k(m) a_{jm}^+, \quad b_{km} = \sum_j D_j^k(m)^* a_{jm}$$

Précisons, pour éviter toute confusion avec les notations courantes, que les coefficients D n'ont rien à voir avec des matrices de rotation. On peut noter en outre que les sommations ne portent pas sur m , car on a fait l'hypothèse d'une symétrie axiale pour les noyaux.

Nous voulons que les opérateurs b et b^+ satisfassent les mêmes relations d'anticommutation que les a et a^+ , c'est-à-dire

$$(I.6) \quad \{b_{k_1 m_1}, b_{k_2 m_2}\} = 0, \quad \{b_{k_1 m_1}^+, b_{k_2 m_2}^+\} = 0,$$

$$(I.7) \quad \{b_{k_1 m_1}, b_{k_2 m_2}^+\} = \delta_{k_1 k_2} \delta_{m_1 m_2}.$$

Les conditions (I.6) sont remplies pour un choix quelconque des coefficients $D_j^k(m)$. Par contre, la condition (I.7) impose aux coefficients $D_j^k(m)$ de remplir certaines conditions d'orthogonalité :

$$(I.8) \quad \sum_j D_j^{k_1}(m)^* D_j^{k_2}(m) = \delta_{k_1 k_2}, \quad \sum_k D_{j_1}^k(m)^* D_{j_2}^k(m) = \delta_{j_1 j_2}.$$

Par ailleurs, nous voulons que la fonction d'essai ψ soit normalisée à l'unité :

$$(I.9) \quad \langle \psi | \psi \rangle = 1.$$

Ceci conduit à la condition suivante :

$$(I.10) \quad \prod_{km} (U_{km}^* U_{km} + V_{km}^* V_{km}) = 1.$$

La façon la plus immédiate de remplir cette condition est d'imposer pour tous les k, m

$$(I.11) \quad U_{km}^* U_{km} + V_{km}^* V_{km} = 1.$$

Ecrivons la transformation inverse de (I.5) :

$$(I.12) \quad a_{jm}^+ = \sum_k D_j^k(m)^* b_{km}^+, \quad a_{jm} = \sum_k D_j^k(m) b_{km}.$$

A l'aide de cette transformation inverse, on peut facilement récrire l'hamiltonien (I.1) en utilisant les nouveaux opérateurs b :

$$(I.13) \quad \mathcal{H} = \sum_{k_1 k_2 m} (\tilde{\varepsilon}_{k_1 k_2 m} - \lambda \delta_{k_1 k_2}) b_{k_1 m}^+ b_{k_2 m} + \sum_{\substack{\text{tous } k \\ \text{tous } m}} \tilde{\gamma}_{k_1 m_1 k_2 m_2 k_3 m_3 k_4 m_4} b_{k_1 m_1}^+ b_{k_2 m_2}^+ b_{k_4 m_4} b_{k_3 m_3},$$

les quantités transformées (tilde) étant définies comme suit :

$$(I.14) \quad \tilde{\varepsilon}_{k_1 k_2 m} - \lambda \delta_{k_1 k_2} = \sum_j (\varepsilon_{jm} - \lambda) D_j^{k_1}(m)^* D_j^{k_2}(m),$$

$$(I.15) \quad \tilde{\gamma}_{k_1 m_1 k_2 m_2 k_3 m_3 k_4 m_4} = \sum_{\text{tous } j} \gamma_{j_1 m_1 j_2 m_2 j_3 m_3 j_4 m_4} \times \\ \times D_{j_1}^{k_1}(m_1)^* D_{j_2}^{k_2}(m_2)^* D_{j_3}^{k_3}(m_3) D_{j_4}^{k_4}(m_4).$$

Avec ces définitions, nous pouvons évaluer maintenant la valeur moyenne de l'opérateur hamiltonien (I.13). On trouve le résultat suivant :

$$(I.16) \quad E_{\text{BCS}} = \langle \psi | \mathcal{H} | \psi \rangle = 2 \sum_{\text{km}} (\tilde{\varepsilon}_{\text{km}} - \lambda) V_{\text{km}}^* V_{\text{km}} + \\ + 4 \sum_{\text{kk'mm'}} \tilde{\mathcal{V}}_{\text{kmk}, -\text{mk'm'k'}, -\text{m'}} V_{\text{km}}^* V_{\text{k'm'}} U_{\text{k'm'}}^* U_{\text{km}} - \\ - 4 \sum_{\text{kk'mm'}} (\tilde{\mathcal{V}}_{\text{kmk'm'k'm'km}} + \tilde{\mathcal{V}}_{\text{kmk'}, -\text{m'k'}, -\text{m'km}}) V_{\text{km}}^* V_{\text{km}} V_{\text{km'}}^* V_{\text{k'm'}}.$$

Nous avons utilisé l'égalité

$$(I.17) \quad \tilde{\varepsilon}_{\text{k}_1 \text{k}_2 \text{m}} = \tilde{\varepsilon}_{\text{k}_1 \text{k}_2, -\text{m}}$$

et simplifié l'écriture dans le cas $\text{k}_1 = \text{k}_2$,

$$(I.18) \quad \tilde{\varepsilon}_{\text{kkkm}} \rightarrow \tilde{\varepsilon}_{\text{km}}.$$

Il convient de mentionner encore les hypothèses

$$(I.19) \quad V_{\text{km}} = V_{\text{k}, -\text{m}}, \quad U_{\text{km}} = U_{\text{k}, -\text{m}}$$

et les propriétés de symétrie aisément vérifiables que nous avons dû faire ou utiliser pour aboutir à cette formule (I.16) :

$$(I.20) \quad \tilde{\mathcal{V}}_{\text{k}_1 \text{m}_1 \text{k}_2 \text{m}_2 \text{k}_3 \text{m}_3 \text{k}_4 \text{m}_4} = - \tilde{\mathcal{V}}_{\text{k}_2 \text{m}_2 \text{k}_1 \text{m}_1 \text{k}_3 \text{m}_3 \text{k}_4 \text{m}_4} = - \tilde{\mathcal{V}}_{\text{k}_1 \text{m}_1 \text{k}_2 \text{m}_2 \text{k}_4 \text{m}_4 \text{k}_3 \text{m}_3}.$$

On peut, à ce point, confronter ce résultat et celui de Belyaev [7]. Ils sont identiques si l'on multiplie par $+2$ les éléments de matrice $\langle \alpha \beta | G | \gamma \delta \rangle$ de Belyaev. Le 2 vient de l'absence du facteur $1/2$ dans notre hamiltonien, le signe $+$ parce que l'on a dans les deux cas un ordre différent des opérateurs et le signe contraire pour les éléments de matrice.

On est maintenant en mesure de dériver les équations d'Euler-Lagrange par un principe variationnel défini pour l'hamiltonien (I.13) et la fonction d'essai (I.3) :

$$(I.21) \quad \delta \langle \psi | \mathcal{H} - E | \psi \rangle = \delta \langle \psi | H - \lambda N - E | \psi \rangle = 0.$$

Le tableau I résume schématiquement notre processus variationnel.

TABLEAU I

Variation	1	2
en fonction des	U_{km} et V_{km}	$D_j^{\text{k}}(\text{m})$
avec les conditions subsidiaires	$U_{\text{km}}^2 + V_{\text{km}}^2 = 1$	$\sum_j D_j^{\text{k}_1*}(\text{m}) D_j^{\text{k}_2}(\text{m}) = \delta_{\text{k}_1 \text{k}_2}$ $\sum_{\text{k}} D_{\text{j}_1}^{\text{k}}(\text{m}) D_{\text{j}_2}^{\text{k}}(\text{m}) = \delta_{\text{j}_1 \text{j}_2}$
dont on tient compte par	U_{km}^2 exprimé en fonction de V_{km}^2	Multiplicateur de Lagrange $\delta \langle \psi \mathcal{H} - \sum_{\text{k}_1 \text{k}_2 \text{m}} \mathcal{K}^{\text{k}_1 \text{k}_2 \text{m}} \sum_j D_j^{\text{k}_1*}(\text{m}) D_j^{\text{k}_2}(\text{m}) \psi \rangle = 0$
conduisant aux équations de	Belyaev	Hartree-Bogoliubov

Suivant la voie n° 1 on fait varier en fonction des U et V . Ces quantités doivent remplir la condition subsidiaire (I.11) écrite dans le tableau I en supposant que les U et V sont réels. Nous dériverons en effet les équations avec des U et V réels, donnant au chapitre III la justification de ce choix. Pour tenir compte de cette condition, le plus simple consiste, par exemple, à exprimer les U en fonction des V et à faire varier l'expression en fonction des V seuls. Ceci conduit à un ensemble d'équations familières, les équations de Belyaev.

Suivant la voie n° 2, on fait varier en fonction des coefficients D de la transformation. Les D doivent se plier aux conditions d'orthogonalité (I.8). Ces deux conditions ne sont pas indépendantes. On tiendra compte de l'une d'entre elles en introduisant un multiplicateur de Lagrange supplémentaire et on fera varier l'expression écrite dans le tableau I en fonction d'un $D_{j(m)}^{k*}$ déterminé. Ceci conduit à l'ensemble des équations de Hartree-Bogoliubov.

a) *Résultat de la variation suivant la voie 1.* — Equation de Belyaev pour une sorte de particules :

$$(I.22) \quad 0 = (\tilde{\varepsilon}_{km} - \lambda + \tilde{\Gamma}_{km}) U_{km} V_{km} + \tilde{\Delta}_{km}(U_{km}^2 - V_{km}^2),$$

avec la condition (I.11), les définitions (I.14), (I.15), (I.18) et les nouvelles définitions suivantes :

$$(I.23) \quad \tilde{\Delta}_{km} = 2 \sum_{k'm'} \tilde{\gamma}_{k'm'k', -m'kmk, -m} U_{k'm'} V_{k'm'},$$

$$(I.24) \quad \tilde{\Gamma}_{km} = -4 \sum_{k'm'} \{ \tilde{\gamma}_{k'm'kmk, m'k'm'} + \tilde{\gamma}_{k'm'k, -mk, -m'k'm'} \} V_{k'm'}^2.$$

Les éléments de matrice $\tilde{\gamma}$ et les énergies $\tilde{\varepsilon}$ sont des quantités transformées. C'est ce qui différencie nos équations de celles qui ont été dérivées dans les travaux antérieurs, notamment celui de Belyaev.

b) *Résultat de la variation suivant la voie 2.* — Equation de Hartree-Bogoliubov pour une sorte de particules :

$$(I.25) \quad E_{km} D_{j(m)}^{k'} V_{km} = (\varepsilon_{jm} - \lambda) D_{j(m)}^{k'} V_{km} + \\ + \sum_j \Delta_{jm}^{j'} D_{j(m)}^{k'} U_{km} + \sum_{j'} \Gamma_{jm}^{j'} D_{j(m)}^{k'} V_{km} + \sum_{k' \neq k} \lambda^{kk'm} D_{j(m)}^{k'},$$

avec les définitions

$$(I.26) \quad \Delta_{jm}^{j'} = 4 \sum_{k'm'} \sum_{j_2 j_4} \gamma_{jm j_2 j', -mj_2 m' j_4, -m'} D_{j_2}^{k'}(m') D_{j_4}^{k'}(m') U_{k'm'} V_{k'm'},$$

$$(I.27) \quad \Gamma_{jm}^{j'} = 4 \sum_{k'm'} \sum_{j_2 j_4} (\gamma_{jm j_2 m' j' m j_3 m'} + \\ + \gamma_{jm j_2, -m' j' m j_3, -m'}) D_{j_2}^{k'}(m') D_{j_4}^{k'}(m') V_{k'm'}^2.$$

On pourrait discuter ici le sens des équations auxquelles nous avons abouti et étudier le processus de résolution de ces équations. En fait, nous désirons appliquer ce traitement à l'étude des noyaux, c'est-à-dire plus généralement des systèmes composés de deux sortes de particules. Nous avons jusqu'ici développé, de façon relativement détaillée, la dérivation des équations pour une sorte de particules. Pour éviter une répétition des mêmes processus et avant toute discussion, nous allons indiquer comment il convient de modifier les équations finales pour les adapter aux systèmes à deux sortes de particules.

2. **Généralisation au cas neutrons-protons.** — Puisque nous désirons étudier le problème d'un certain nombre de neutrons et de protons en dehors à la fois de configurations fermées, nous devons généraliser notre traitement aux systèmes composés de deux sortes de particules. Nous décrirons le système par un produit de fonctions d'onde de B. C. S.

Nous adoptons les notations suivantes :

k, j, m conservent la même signification que précédemment et sont utilisés pour les neutrons ;

γ, ν, μ représentent ces mêmes quantités énoncées dans le même ordre pour les protons.

$$(1.28) \quad \psi = \prod_{k, m > 0}^{N_n} (U_{km} + V_{km} b_{km}^+ b_{k, -m}^+) \prod_{\gamma, \mu > 0}^{N_p} (U_{\gamma\mu} + V_{\gamma\mu} b_{\gamma\mu}^+ b_{\gamma, -\mu}^+) \Phi_0,$$

le vide Φ_0 étant défini aussi bien pour les protons que pour les neutrons :

$$(1.29) \quad b_{km} \Phi_0 = 0, \quad b_{\gamma\mu} \Phi_0 = 0$$

et N_n, N_p étant les nombres de neutrons et de protons du système considéré. Pour distinguer les quantités se référant aux neutrons de celles se référant aux protons on ajoutera un indice (n) ou (p) chaque fois que ces quantités ne se trouveront définies ni par un indice ni par un argument conventionnel k, j, m, γ, ν ou μ .

Dans (1.28) on n'a pas tenu compte d'un possible appariement entre protons et neutrons. Nous pensons qu'il s'agit là d'une approximation raisonnable pour des noyaux lourds et moyens car neutrons et protons sont dans ce cas dans des niveaux à une particule très différents.

L'hamiltonien pour le système neutrons-protons peut s'écrire

$$(1.30) \quad \mathcal{H} = H^{(n)} + H^{(p)} + H^{(np)} - \lambda^{(n)} N_n - \lambda^{(p)} N_p,$$

où

$$(1.31) \quad H^{(n)} - \lambda^{(n)} N_n = \sum_{jm} (\varepsilon_{jm} - \lambda^{(n)}) a_{jm}^+ a_{jm} + \sum_{\text{tous } jm} \langle j \rangle_{j_1 m_1 j_2 m_2 j_3 m_3 j_4 m_4} a_{j_1 m_1}^+ a_{j_2 m_2}^+ a_{j_3 m_3} a_{j_4 m_4},$$

$$(1.32) \quad H^{(p)} - \lambda^{(p)} N_p = \sum_{\nu\mu} (\varepsilon_{\nu\mu} - \lambda^{(p)}) a_{\nu\mu}^+ a_{\nu\mu} + \sum_{\text{tous } \nu\mu} \langle j \rangle_{\nu_1 \mu_1 \nu_2 \mu_2 \nu_3 \mu_3 \nu_4 \mu_4} a_{\nu_1 \mu_1}^+ a_{\nu_2 \mu_2}^+ a_{\nu_3 \mu_3} a_{\nu_4 \mu_4},$$

$$(1.33) \quad H^{(np)} = \sum_{\substack{\text{tous } jm \\ \text{tous } \nu\mu}} \langle j \rangle_{j_1 m_1 \nu_2 \mu_2 j_3 m_3 \nu_4 \mu_4} a_{j_1 m_1}^+ a_{\nu_2 \mu_2}^+ a_{\nu_3 \mu_3} a_{j_3 m_3}.$$

L'énergie totale prend alors la forme suivante :

$$(1.34) \quad E_{\text{BCS}} = \langle \psi | \mathcal{H} | \psi \rangle = E^{(n)} + E^{(p)} + E^{(np)},$$

$$(1.35) \quad E^{(n)} = 2 \sum_{km} (\tilde{\varepsilon}_{km} - \lambda^{(n)}) V_{km}^{(n)2} + \sum_{\substack{km \\ k'm'}} \langle j \rangle_{kmk, -mk' m' k', -m'} V_{km} V_{k'm'} U_{km} U_{k'm'} + \sum_{\substack{km \\ k'm'}} \langle j \rangle_{kmk' m' kmk' m'} + \langle j \rangle_{kmk', -m' k', -m' km} V_{km}^2 V_{k'm'}^2,$$

(1.36) $E^{(p)} =$ même expression que $E^{(n)}$ en remplaçant partout (n), k et m par (p), γ et μ respectivement,

$$(1.37) \quad E^{(np)} = 2 \sum_{\substack{\text{km} \\ \gamma\mu}} (\lambda_{\text{km}\gamma\mu\text{km}\gamma\mu} + \lambda_{\text{km}\gamma,-\mu\text{km}\gamma,-\mu}) V_{\text{km}}^2 V_{\gamma\mu}^2.$$

C'est ce dernier terme représentatif de l'interaction neutron-proton qui va entraîner des modifications dans les équations d'Euler-Lagrange.

Pour les neutrons, l'équation de Belyaev s'écrit

$$(1.38) \quad 0 = (\tilde{\varepsilon}_{\text{km}} - \lambda^{(n)} + \tilde{\Gamma}_{\text{km}} + \tilde{\Omega}_{\text{km}}) U_{\text{km}} V_{\text{km}} + \tilde{\Delta}_{\text{km}} (U_{\text{km}}^2 - V_{\text{km}}^2).$$

Les définitions de $\tilde{\Delta}_{\text{km}}$ et $\tilde{\Gamma}_{\text{km}}$ restent inchangées à savoir (1.23) et (1.24). Le terme supplémentaire $\tilde{\Omega}_{\text{km}}$ est défini de la façon suivante :

$$(1.39) \quad \tilde{\Omega}_{\text{km}} = \sum_{\gamma\mu} (\lambda_{\text{km}\gamma\mu\text{km}\gamma\mu} + \lambda_{\text{km}\gamma,-\mu\text{km}\gamma,-\mu}) V_{\gamma\mu}^2,$$

$$(1.40) \quad \lambda_{k_1 m_1 \gamma_1 \mu_1 k_2 m_2 \gamma_2 \mu_2} = \sum_{\substack{\text{tous } j \\ \text{tous } v}} \lambda_{j_1 m_1 v_1 \mu_1 j_2 m_2 v_2 \mu_2} D_{j_1}^{k_1}(\hat{m}_1) D_{v_2}^{\gamma_2}(\hat{\mu}_2) D_{j_2}^{k_2}(\hat{m}_2) D_{v_1}^{\gamma_1}(\hat{\mu}_1).$$

L'équation de Belyaev pour les protons se déduit de celle des neutrons par remplacement des indices (n), k et m par (p), γ et μ :

$$(1.41) \quad 0 = (\tilde{\varepsilon}_{\gamma\mu} - \lambda^{(p)} + \tilde{\Gamma}_{\gamma\mu} + \tilde{\Omega}_{\gamma\mu}) U_{\gamma\mu} V_{\gamma\mu} + \tilde{\Delta}_{\gamma\mu} (U_{\gamma\mu}^2 - V_{\gamma\mu}^2).$$

Les définitions des différentes quantités se déduisent de celles concernant les neutrons par le même remplacement d'indices.

Donnons maintenant l'équation de Hartree-Bogoliubov pour les neutrons, résultat de la dérivation en fonction des D des neutrons,

$$(1.42) \quad E_{\text{km}} D_j^k(m) V_{\text{km}} = (\varepsilon_{\text{jm}} - \lambda^{(n)}) D_j^k(m) V_{\text{km}} + \sum_{j'} \Delta_{\text{jm}}^{j'} D_j^k(m) U_{\text{km}} - \sum_{j'} (\Gamma_{\text{jm}}^{j'} + \Omega_{\text{jm}}^{j'}) D_j^k(m) V_{\text{km}} + \sum_{k' \neq k} \lambda^{kk'm} D_j^{k'}(m)$$

avec les définitions (1.26) et (1.27) pour les quantités $\Delta_{\text{jm}}^{j'}$ et $\Gamma_{\text{jm}}^{j'}$ et, par ailleurs,

$$(1.43) \quad \Omega_{\text{jm}}^{j'} = \sum_{\gamma'\mu'} \sum_{v_2 v_1} (\lambda_{\text{jm} v_2 \mu' j' m v_1 \mu'} + \lambda_{\text{jm} v_2, -\mu' j' m v_1, -\mu'}) D_{v_2}^{\gamma'}(\mu') D_{v_1}^{\gamma'}(\mu') V_{\gamma'\mu'}^2.$$

L'équation de Hartree-Bogoliubov pour les protons (1.44) ainsi que les définitions correspondantes (1.45) à (1.47) se déduisent de l'équation (1.42) et des définitions (1.26), (1.27) et (1.43) par remplacement des indices tel qu'il a été indiqué précédemment, à savoir

$$(1.44) \quad E_{\text{km}} D_j^k(m) V_{\text{km}} = (\varepsilon_{\text{jm}} - \lambda^{(n)}) D_j^k(m) V_{\text{km}} + \sum_{j'} \Delta_{\text{jm}}^{j'} D_j^k(m) U_{\text{km}} + \sum_{j'} (\Gamma_{\text{jm}}^{j'} + \Omega_{\text{jm}}^{j'}) D_j^k(m) V_{\text{km}} + \sum_{k' \neq k} \lambda^{kk'm} D_j^{k'}(m),$$

$$(1.45) \quad \Delta_{v\mu}^{v'} = 4 \sum_{\gamma'\mu'} \sum_{v_3 v_1} \lambda_{v\mu v', -\mu v_3 \mu' v_1, -\mu'} D_{v_1}^{\gamma'}(\mu') D_{v_3}^{\gamma'}(\mu') U_{\gamma'\mu'} V_{\gamma'\mu'},$$

$$(1.46) \quad \Gamma_{v\mu}^{v'} = 4 \sum_{\gamma'\mu'} \sum_{v_2 v_3} [\lambda_{v\mu v_2 \mu' v' \mu v_3 \mu'} + \lambda_{v\mu v_2, -\mu' v' \mu v_3, -\mu'}] D_{v_2}^{\gamma'}(\mu_2') D_{v_3}^{\gamma'}(\mu_3') V_{\gamma'\mu'}^2,$$

$$(1.47) \quad \Omega_{v\mu}^{v'} = \sum_{k'm'} \sum_{j_2 j_1} [\lambda_{v\mu j_2 m' v' \mu j_1 m'} + \lambda_{v\mu j_2, -m' v' \mu j_1, -m'}] D_{j_2}^{k'}(m') D_{j_1}^{k'}(m') V_{k'm'}^2.$$

Pour utiliser les équations (1.42) et (1.44) on les multiplie à droite et à gauche par le coefficient $D_j^{k'}(\hat{m})$ ou $D_{v'}^{\gamma'}(\hat{\mu})$ et on utilise les relations d'orthogonalité (1.8) de façon à éliminer le terme contenant le multiplicateur de Lagrange. Les équations

tions contiennent, outre le potentiel usuel $\Gamma_{jm}^{I'}$ ou $\Gamma_{\nu\mu}^{V'}$ de Hartree-Fock, un potentiel d'appariement $\Delta_{jm}^{j'}$ ou $\Delta_{\nu\mu}^{V'}$.

Ces équations concernent les systèmes contenant un nombre pair de neutrons et un nombre pair de protons. Il convient d'étendre notre traitement aux systèmes pair-impair. Cette généralisation fait l'objet du paragraphe suivant.

3. **Blocage.** — Le modèle d'appariement a été étendu aux systèmes contenant un nombre impair de particules, en bloquant l'une des paires d'états disponibles. Considérons, par exemple, un système formé d'un nombre pair de protons et d'un nombre impair de neutrons. Dans notre traitement un tel système sera décrit par la fonction

$$(I.48) \quad \psi_{\bar{k}\bar{m}} = b_{\bar{k}\bar{m}}^+ \prod_{\substack{k, m \\ k, m \neq \bar{k}, \bar{m}}}^{N_n} (U_{km} + V_{km} b_{km}^+ b_{k, -m}^+) \prod_{\substack{\gamma, \mu}}^{N_p} (U_{\gamma\mu} + V_{\gamma\mu} b_{\gamma\mu}^+ b_{\gamma, \mu-}^+) \Phi_0.$$

Pour alléger la présentation du formalisme nous ne jugeons pas utile de récrire toutes les équations et définitions des paragraphes précédents. Indiquons seulement où vont intervenir les changements en précisant leur nature, les équations et définitions du paragraphe I.2 non mentionnées restant valables.

Dans l'expression (I.34) donnant l'énergie totale du système, on représentera l'interaction d'une paire de particules avec le « neutron impair » par des termes spéciaux qui modifieront l'allure générale de l'expression de la façon suivante : dans l'expression (I.35) de $E^{(n)}$ l'énergie de l'état neutron « bloqué » $\bar{\varepsilon}_{\bar{k}\bar{m}}$ sera ajoutée au premier terme ; aucune modification à faire au second terme représentatif de l'interaction de paires ; terme additionnel dans le troisième terme de l'expression représentant l'interaction du neutron « célibataire » avec les autres neutrons ; pas de modification à intervenir dans l'expression (I.36) de $E^{(p)}$; enfin, dans l'expression (I.37) de $E^{(np)}$, un terme additionnel devra représenter l'interaction du neutron « célibataire » avec les protons.

A partir de ces considérations il est trivial de déduire les changements à opérer sur les équations finales de Belyaev et de Hartree et Bogoliubov, nous ne les récrivons donc pas ici. Ceci sera étudié en détail dans le cas plus complexe où le nombre de particules est conservé, dans le chapitre II.

4. **Moment quadrupolaire.** — Nous voulons établir l'expression qui donnera le moment quadrupolaire dans le cadre de notre formalisme. Ce moment quadrupolaire sera le fait des nucléons extérieurs au cœur sphérique qui, partant, aura une contribution nulle. Nous parlons de moment quadrupolaire sans préciser le nucléon puisqu'il sera aussi intéressant de le calculer pour les neutrons.

En reprenant les notations de l'équation (I.1) on peut écrire le moment quadrupolaire de la façon suivante :

$$(I.49) \quad Q = \langle \psi | \sum_{jj'm} q \langle j m | Y_2^0 | j' m \rangle \langle n l | r^2 | n' l' \rangle a_{jm}^+ a_{j'm} | \psi \rangle.$$

Pour simplifier l'écriture nous poserons

(I.50) $q \langle j m | Y_2^0 | j' m \rangle = q_{jj'm}$ et $\langle n l | r^2 | n' l' \rangle = \langle j | r^2 | j' \rangle$.
La transformation linéaire (I.5) permet de récrire l'expression (I.49) avec les nouveaux opérateurs b :

$$(I.51) \quad Q = \langle \psi | \sum_{kk'm} \left[\sum_{jj'} q_{jj'm} \langle j | r^2 | j' \rangle D_j^{k,*}(\bar{m}) D_{j'}^{k'}(m) \right] b_{km}^+ b_{k'm} | \psi \rangle.$$

Définissons la quantité transformée

$$(1.52) \quad \tilde{q}_{kk'm} = \sum_{jj'} q_{jjm} \langle j | r^2 | j' \rangle D_j^k(\tilde{m}) D_{j'}^{k'}(m).$$

Alors,

$$(1.53) \quad Q = \langle \psi | \sum_{kk'm} \tilde{q}_{kk'm} b_{km}^+ b_{k'm} | \psi \rangle.$$

Ceci est à comparer à la valeur moyenne déjà calculée de l'opérateur énergie $\tilde{\varepsilon}_{k,k,m}$ dans le traitement de Hartree et Bogoliubov. On peut immédiatement transposer ici ce résultat

$$(1.54) \quad Q = 2 \sum_{km>0} \tilde{q}_{km} V_{km}^2$$

ou encore en revenant aux notations de départ, grâce successivement à (1.52) et (1.50),

$$(1.55) \quad Q = 2 \sum_{km>0} V_{km}^2 \left[\sum_{jj'} q \langle jm | V_2^0 | j' m \rangle \langle n l | r^2 | n' l \rangle D_j^k(\tilde{m}) D_{j'}^k(m) \right].$$

II. Le modèle nucléaire d'appariement avec conservation du nombre de particules

1. Les équations d'Euler-Lagrange correspondant à un état de B. C. S. qui conserve le nombre de particules. — Pour une sorte de nucléons interagissants, l'hamiltonien s'écrira comme précédemment (I.1), à l'exception toutefois du multiplicateur de Lagrange λ qui, bien entendu, disparaît dans la représentation nombre d'occupation. En conservant les notations du chapitre I nous écrirons

$$(II.1) \quad \mathcal{H} = \sum_{j,\pm m} \varepsilon_{jm} a_{jm}^+ a_{jm} + \sum_{\substack{j_1, \pm m_1, j_2, \pm m_2 \\ j_3, \pm m_3, j_4, \pm m_4}} \mathcal{V}_{j_1 m_1 j_2 m_2 j_3 m_3 j_4 m_4} a_{j_1 m_1}^+ a_{j_2 m_2}^+ a_{j_3 m_3} a_{j_4 m_4}.$$

On choisit encore une représentation dans laquelle l'hamiltonien sans interactions résiduelles est diagonal. On peut alors considérer les énergies à une particule ε_{jm} comme les niveaux d'énergie discrets d'un oscillateur harmonique ou de tout autre potentiel à une particule, plus réaliste.

Nous décrivons le système par une fonction d'essai ψ que nous obtenons par projection d'un état propre de l'opérateur nombre N , à partir d'un état de B. C. S.

$$(II.2) \quad N = \sum_{j,\pm m} a_{jm}^+ a_{jm}.$$

Cet état ψ peut être écrit sous la forme

$$(II.3) \quad \psi = C \oint \xi^{-n_0-1} \prod_{\nu} (U_{\nu} + V_{\nu} \xi a_{\nu}^+ a_{-\nu}^+) d\xi \Phi_0.$$

Dans cette notation — ν est l'état quantique obtenu à partir de l'état quantique ν par renversement du temps. Plus précisément, ν peut être considéré comme une abréviation pour (σ, k, m) , σ pouvant représenter tout nombre quantique additionnel, de sorte que l'on peut définir symboliquement — $\nu = (\sigma, k, -m)$. n_0 est le nombre de paires de particules. C est une constante de normalisation définie par la condition

$$(II.4) \quad \langle \psi | \psi \rangle = 1 \quad \text{ou} \quad |C|^2 = 1/(-4\pi^2 R_0^0).$$

Nous définissons les fonctions suivantes comme résidus des intégrales au tour simple dans le plan complexe :

$$(II.5) \quad R_n^X(v_1, \dots, v_N) = \frac{1}{2\pi i} \oint z^{-(n_0+1)} \prod_{v=v_1, \dots, v_N} (U_v^2 + z V_v^2) dz;$$

N est le nombre de facteurs qui doivent être exclus du produit $\prod (U_v^2 + z V_v^2)$.

Pour $N = 0$ le produit contient N_0 facteurs différents $U_v^2 + z V_v^2$. Physiquement N_0 est le nombre d'états v à une particule que nous prenons en considération.

Nous verrons plus loin quelques propriétés mathématiques importantes (II.15) et (II.16) de ces fonctions.

Dans le cas d'une interaction engendrant des éléments de matrice du type d'appariement négatifs, on a déjà indiqué dans le chapitre I que l'on obtient la solution la plus basse en énergie pour des U et V réels et positifs. La preuve en est donnée dans le chapitre III.

Nous considérons donc désormais les U et V comme des quantités réelles et positives, remplissant la condition (I.14). Nous remarquons que l'énergie totale

$$(II.6) \quad E = \langle \psi | \mathcal{H} | \psi \rangle = \langle \psi | \psi \rangle$$

reste inchangée si l'on multiplie tous les quotients U_v/V_v par un facteur commun X . Ainsi, même en tenant compte de la condition de normalisation, l'ensemble des paramètres U_v, V_v n'est pas défini de façon unique par le problème variationnel comme on le verra au chapitre III.

Recherchons maintenant les équations d'Euler-Lagrange qui doivent être satisfaites. Pour que E soit stationnaire nous avons la condition

$$(II.7) \quad \delta \{ \langle \psi | \mathcal{H} | \psi \rangle - E \langle \psi | \psi \rangle \} = 0.$$

On peut écrire l'énergie totale en utilisant les fonctions résidus (II.5)

$$(II.8) \quad E = 2 \sum_v \varepsilon_v V_v^2 \frac{R_1^1(v)}{R_0^0} + 4 \sum_v ()'_{v, -v, -v} V_v^2 \frac{R_1^1(v)}{R_0^0} + 4 \sum_{v_1, v_2} ()'_{v_1 v_2 v_1 v_2} - ()'_{v_1, -v_2, v_1, -v_2} V_{v_1}^2 V_{v_2}^2 \frac{R_2^2(v_1, v_2)}{R_0^0} + 4 \sum_{v_1, v_2} ()'_{v_1, -v_2, v_1, -v_2} U_{v_1} V_{v_1} U_{v_2} V_{v_2} \frac{R_1^2(v_1, v_2)}{R_0^0}.$$

Dans cette formulation nous avons fait l'hypothèse

$$(II.9) \quad \varepsilon_v = \varepsilon_{-v}.$$

Les sommations portent exclusivement sur les états ayant des nombres quantiques magnétiques positifs. Dès lors on obtient aisément l'ensemble d'équations suivant :

$$(II.10) \quad (\hat{\varepsilon}_v + \Gamma_v + \Lambda_v) U_v V_v + \Delta_v (U_v^2 - V_v^2) = 0,$$

les quantités $\hat{\varepsilon}_v, \Gamma_v, \Lambda_v, \Delta_v$ étant définies comme suit :

$$(II.11) \quad \hat{\varepsilon}_v = (\varepsilon_v + 2 \sum_{v'} ()'_{v v' v' v} \frac{R_1^1(v')}{R_0^0}) \frac{R_1^1(v)}{R_0^0},$$

$$(II.12) \quad \Gamma_v = 4 \sum ()'_{v v_1 v_1} + ()'_{v, -v_1, v, -v_1} V_{v_1}^2 R_2^2(v_1, v) \frac{R_0^0}{R_0^0},$$

$$(II.13) \quad \Delta_v = 2 \sum ()'_{v, -v_1, -v_1} U_{v_1} V_{v_1} R_1^2(v_1, v) \frac{R_0^0}{R_0^0}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{(II.14)} \quad \Lambda_v = & \sum_{v_1} (\varepsilon_{v_1} + 2) \mathcal{V}_{v_1, -v_1 v_1, -v_1}^2 V_{v_1}^2 \frac{R_0^1(v) R_2^2(v_1, v) - R_1^1(v) R_1^2(v_1, v)}{(R_0^0)^2} \\
 & + 2 \sum_{v_1 v_2} (\mathcal{V}_{v_1 v_2 v_1 v_2}^2 + \mathcal{V}_{v_1, -v_2 v_1, -v_2}^2) V_{v_1}^2 V_{v_2}^2 \frac{R_0^1(v) R_3^3(v_1, v_2, v) - R_1^1(v) R_2^3(v_1, v_2, v)}{(R_0^0)^2} \\
 & + 2 \sum_{v_1 v_2} \mathcal{V}_{v_1, -v_1 v_2, -v_2}^2 U_{v_1} V_{v_1} U_{v_2} V_{v_2} \frac{R_0^1(v) R_2^3(v_1, v_2, v) - R_1^1(v) R_1^3(v_1, v_2, v)}{(R_0^0)^2} \\
 & + [\varepsilon_v V_v^2 + \Gamma_v V_v^2 + 2 \Delta_v U_v V_v] \frac{R_0^1(v) - R_1^1}{R_0^0}.
 \end{aligned}$$

Pour obtenir cette dernière équation nous avons utilisé des formules de récurrence qui peuvent être directement déduites de la définition (II.5) des intégrales résidus :

$$\text{(II.15)} \quad R_{n+1}^{N+1}(v_1, \dots, v_N, v) V_v^2 + R_n^{N+1}(v_1, \dots, v_N, v) U_v^2 = R_n^N(v_1, \dots, v_N),$$

$$\begin{aligned}
 \text{(II.16)} \quad R_n^{N+1}(v_1, \dots, v_N, v) R_{n+1}^{N+1}(v_1, \dots, v_N, v') - R_n^N(v_1, \dots, v_N) R_{n+1}^{N+2}(v_1, \dots, v_N, v, v') \\
 = V_v^2 [R_n^{N+1}(v_1, \dots, v_N, v) R_{n+2}^{N+2}(v_1, \dots, v_N, v, v') - \\
 - R_{n+1}^{N+1}(v_1, \dots, v_N, v) R_{n+1}^{N+2}(v_1, \dots, v_N, v, v')].
 \end{aligned}$$

La relation (II.15) est utilisée pour le calcul des intégrales résidus. A la limite de la méthode du col (avec un col à $z_0 = 1$) cette relation devient la relation de normalisation $U_v^2 + V_v^2 = 1$ de la théorie habituelle de la supraconductivité. On voit en outre, d'après cette relation, que toutes les intégrales résidus auront des valeurs comprises entre 0 et +1 si les U_v et V_v remplissent cette condition de normalisation.

Les quantités Γ_v et Δ_v sont respectivement les potentiels de Hartree-Fock et d'appariement. Ils apparaissent de la même façon que dans la méthode de B. C. S. Dans notre formulation nous avons groupé le terme contenant l'élément de matrice diagonal avec l'énergie (II.11) attachée à une particule, puisqu'il contient les mêmes fonctions résidus que les énergies attachées à une particule, ceci pour raison de commodité. Dans le paragraphe II.4 nous réarrangerons les termes différemment de façon à obtenir immédiatement les quantités de la théorie de B. C. S., une fois appliquée la méthode du col. La quantité Λ_v n'a pas de correspondant dans les équations de la théorie de B. C. S. qui contiennent au contraire un potentiel chimique constant chargé de fixer la valeur moyenne de l'opérateur nombre. Dans la dérivation des équations (II.10) la quantité Λ_v provient de la différentiation des fonctions résidus par rapport aux U_v et V_v .

On peut donner une formulation équivalente de Λ_v :

$$\begin{aligned}
 \text{(II.17)} \quad \Lambda_v = & \sum_{v_1} (\varepsilon_{v_1} + 2) \mathcal{V}_{v_1, -v_1 v_1, -v_1}^2 V_{v_1}^2 \frac{R_2^2(v_1, v) - R_1^2(v_1, v)}{R_0^0} + \\
 & + 2 \sum_{v_1 v_2} (\mathcal{V}_{v_1 v_2 v_1 v_2}^2 + \mathcal{V}_{v_1, -v_2 v_1, -v_2}^2) V_{v_1}^2 V_{v_2}^2 \frac{R_3^3(v_1, v_2, v) - R_2^3(v_1, v_2, v)}{R_0^0} + \\
 & + 2 \sum_{v_1 v_2} \mathcal{V}_{v_1, -v_1 v_2, -v_2}^2 U_{v_1} V_{v_1} U_{v_2} V_{v_2} \frac{R_2^3(v_1, v_2, v) - R_1^3(v_1, v_2, v)}{R_0^0} \\
 & - \frac{1}{2} E \frac{R_1^1(v) - R_0^1(v)}{R_0^0};
 \end{aligned}$$

E est l'énergie totale donnée par (II.8).

Dans la théorie habituelle de la supraconductivité (chap. I), V_v^2 est la probabilité d'occupation de la paire d'états $(v, -v)$ et U_v^2 la probabilité de non-occupation de cette même paire d'états. Ceci n'est plus vrai dans le présent traitement.

Appelons e_v^2 la probabilité d'occupation et f_v^2 la probabilité de non-occupation d'une paire d'états $(v, -v)$. Alors,

$$(II.18) \quad e_v^2 = \langle \psi | (b_v b_{-v})^+ b_v b_{-v} | \psi \rangle = V_v^2 R_1^1(v)/R_0^0,$$

$$(II.19) \quad f_v^2 = 1 - e_v^2 = U_v^2 R_0^1(v)/R_0^0.$$

Bien entendu, la somme des probabilités d'occupation étendue à tous les états considérés est égale à n_0 , le nombre de paires de particules du problème :

$$(II.20) \quad \sum_v e_v^2 = n_0.$$

2. Blocage dans la théorie au nombre de particules conservé. — Comme dans le chapitre I, nous pouvons étendre notre traitement aux systèmes contenant un nombre impair de particules, en bloquant l'une des paires d'états disponibles. Un tel système sera décrit ici par la fonction

$$(II.21) \quad \psi_v = C \oint \xi^{-n_0-1} b_v^- \prod_{v \neq v} (U_v + V_v \xi b_v^+ b_{-v}^+) d\xi \Phi_0,$$

la constante de normalisation étant déterminée par la relation suivante :

$$(II.22) \quad |C|^2 = 1/[-4\pi^2 R_0^1(\bar{v})];$$

n_0 est le nombre de paires, le nombre total de particules étant $n_0 + 1$; $\bar{v}$ définit l'état occupé par le « nucléon impair ».

Les formules que l'on obtient à partir de cet état (II.21) peuvent être aisément déduites des précédentes. Les fonctions résidus contiendront l'argument additionnel $\bar{v}$ caractérisant l'état qui ne sera jamais disponible pour aucune paire de particules. En outre, l'interaction d'une paire de particules avec le « nucléon impair » sera représentée par un terme spécial qui modifiera les définitions des quantités $\hat{\varepsilon}_v$ et Λ_v .

L'énergie totale E prend la forme suivante :

$$(II.23) \quad E = 2 \sum_v \varepsilon_v V_v^2 \frac{R_1^2(\bar{v}, v)}{R_0^1(v)} + \varepsilon_{\bar{v}} + 4 \sum_v \gamma_{v, -v, -v} V_v^2 \frac{R_1^2(\bar{v}, v)}{R_0^1(\bar{v})} +$$

$$+ 4 \sum_{v_1 v_2} (\gamma_{v_1 v_2 v_1 v_2} + \gamma_{v_1, -v_2 v_1, -v_2}) V_{v_1}^2 V_{v_2}^2 \frac{R_2^3(\bar{v}, v_1, v_2)}{R_0^1(\bar{v})} +$$

$$+ 4 \sum_{v_1} (\gamma_{v v_1 \bar{v} v_1} + \gamma_{\bar{v}, -v_1 \bar{v}, -v_1}) V_{v_1}^2 \frac{R_1^2(\bar{v}, v_1)}{R_0^1(\bar{v})} +$$

$$+ 4 \sum_{v_1 v_2} \gamma_{v_1, -v_1 v_2, -v_2} U_{v_1} V_{v_1} U_{v_2} V_{v_2} \frac{R_1^3(\bar{v}, v_1, v_2)}{R_0^1(\bar{v})}.$$

Les équations d'Euler-Lagrange ont la forme (II.10), avec les nouvelles définitions des coefficients ε_v , Γ_v , Λ_v et Δ_v :

$$(II.24) \quad \hat{\varepsilon}_v = (\varepsilon_v + 2 \gamma_{v, -v, -v}) \frac{R_1^2(\bar{v}, v)}{R_0^1(\bar{v})} + 2 (\gamma_{v v v} + \gamma_{\bar{v}, -v, -v}) \frac{R_1^2(\bar{v}, v)}{R_0^1(\bar{v})},$$

$$(II.25) \quad \Gamma_v = 4 \sum_{v_1} (\gamma_{v v_1 v v_1} + \gamma_{v, -v_1 v, -v_1}) U_{v_1}^2 \frac{R_2^3(\bar{v}, v_1, v)}{R_0^1(v)},$$

$$(II.26) \quad \Delta_v = 2 \sum_{v_1} \gamma_{v, -v v_1, -v_1} U_{v_1} V_{v_1} \frac{R_1^3(\bar{v}, v_1, v)}{R_0^1(v)},$$

$$(II.27) \quad \Lambda_v = \sum_{v_1} (\varepsilon_{v_1} + 2 \gamma_{v_1, -v_1 v_1, -v_1}) U_{v_1}^2 \frac{R_2^3(\bar{v}, v_1, v) - R_1^3(\bar{v}, v_1, v)}{R_0^1(\bar{v})} +$$

$$+ 2 \sum_{v_1} (\gamma_{v v_1 \bar{v} v_1} + \gamma_{\bar{v}, -v_1 \bar{v}, -v_1}) V_{v_1}^2 \frac{R_2^3(\bar{v}, v_1, v) - R_1^3(\bar{v}, v_1, v)}{R_0^1(\bar{v})} +$$

$$+ 2 \sum_{v_1 v_2} (\gamma_{v_1 v_2 v_1 v_2} + \gamma_{v_1, -v_2 v_1, -v_2}) V_{v_1}^2 V_{v_2}^2 \frac{R_2^4(\bar{v}, v_1, v_2, v) - R_1^4(\bar{v}, v_1, v_2, v)}{R_0^1(\bar{v})} +$$

$$+ 2 \sum_{v_1 v_2} \gamma_{v_1, -v_1 v_2, -v_2} U_{v_1} V_{v_1} U_{v_2} V_{v_2} \frac{R_2^4(\bar{v}, v_1, v_2, v) - R_1^4(\bar{v}, v_1, v_2, v)}{R_0^1(\bar{v})} -$$

$$- \frac{E - \varepsilon_v}{2} \frac{R_1^2(\bar{v}, v) - R_0^2(\bar{v}, -v)}{R_0^1(v)}.$$

Le blocage de différents états v conduira en général à des énergies totales E différentes. La plus petite de ces énergies est celle de l'état fondamental du système, les autres correspondent à des états excités.

3. Généralisation au cas neutrons-protons. — Nous généralisons notre traitement aux systèmes composés de deux sortes de particules en décrivant le système par un produit de fonctions d'onde de B. C. S., chacune de celles-ci conservant le nombre de particules de l'espèce qu'elle décrit :

$$(II.28) \quad \psi = C \oint \xi_1^{-n_p-1} \prod_{K>0}^{N_p} (U_K + V_K \xi_1 b_K^+ b_{-K}^+) d\xi_1 \times$$

$$\times \oint \xi_2^{-n_n-1} \prod_{v>0}^{N_n} (U_v + V_v \xi_2 b_v^+ b_{-v}^+) d\xi_2 \Phi_0 ;$$

b_v^+, b_K^+ sont respectivement les opérateurs de création d'un neutron dans l'état v et d'un proton dans l'état K ; Φ_0 est l'état vide; n_p, n_n sont les nombres de paires de protons et de neutrons; N_p, N_n sont, respectivement pour les protons et pour les neutrons, les nombres totaux d'états de paire; U_K, V_K et U_v, V_v sont les paramètres variationnels pour les protons et les neutrons respectivement.

Les quantités dont les arguments ou les indices sont v, v_1 ou v_2 ont trait aux neutrons. De même, les arguments ou indices K, K_1 ou K_2 caractérisent des quantités ayant trait aux protons.

Pour les quantités définies sans indice ni argument, on saura qu'elles se réfèrent aux protons ou aux neutrons par un indice supplémentaire (p) ou (n). C'est le cas par exemple des fonctions résidus R_0^0 .

La constante de normalisation est définie de la manière suivante :

$$(II.29) \quad \langle \psi | \psi \rangle = 1 = |C|^2 (4\pi^2)^2 R_0^{(p)0} R_0^{(n)0};$$

$R_n^{(p)N}$ et $R_n^{(n)N}$ sont respectivement des fonctions résidus dépendant de paramètres protons ou neutrons.

Comme dans le chapitre I et pour la même raison, on ne tient pas compte d'un possible appariement entre neutrons et protons.

L'hamiltonien pour le système neutrons-protons est

$$(II.30) \quad \mathcal{H} = \sum_{\pm K} \varepsilon_K a_K^\dagger a_K + \sum_{\substack{\pm K_1 \pm K_2 \\ \pm K_3 \pm K_4}} \gamma_{K_1 K_2 K_3 K_4} a_{K_1}^\dagger a_{K_2}^\dagger a_{K_3} a_{K_4} + \\ + \sum_{\pm \nu} \varepsilon_\nu a_\nu^\dagger a_\nu + \sum_{\substack{\pm \nu_1 \pm \nu_2 \\ \pm \nu_3 \pm \nu_4}} \gamma_{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} a_{\nu_1}^\dagger a_{\nu_2}^\dagger a_{\nu_3} a_{\nu_4} + \sum_{\substack{\pm K_1 \pm K_2 \\ \pm \nu_1 \pm \nu_2}} \gamma_{K_1 \nu_1 K_2 \nu_2} a_{K_1}^\dagger a_{K_2}^\dagger a_{\nu_1} a_{\nu_2};$$

$\varepsilon_K, \varepsilon_\nu$ sont les énergies à une particule des protons et des neutrons ; $\gamma_{K_1 K_2 K_3 K_4}, \gamma_{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4}, \gamma_{K_1 \nu_1 K_2 \nu_2}$ sont les éléments de matrice des interactions proton-proton, neutron-neutron et neutron-proton.

L'énergie totale E prend alors la forme

$$(II.31) \quad E = \frac{\langle \psi | \mathcal{H} | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} - 2 \sum_{K > 0} \varepsilon_K V_K^2 \frac{R_1^1(K)}{R_0^{(p)0}} + 4 \sum_{K > 0} \gamma_{K, -K, K, -K} V_K^2 \frac{R_1^1(K)}{R_0^{(p)0}} + \\ + 4 \sum_{\substack{K_1 > 0 \\ K_2 > 0}} (\gamma_{K_1 K_2 K_1 K_2} + \gamma_{K_1, -K_2, K_1, -K_2}) V_{K_1}^2 V_{K_2}^2 \frac{R_2^2(K_1, K_2)}{R_0^{(p)0}} + \\ + 4 \sum_{\substack{K_1 > 0 \\ K_2 > 0}} \gamma_{K_1, -K_1, K_2, -K_2} U_{K_1} V_{K_1} U_{K_2} V_{K_2} \frac{R_1^1(K_1, K_2)}{R_0^{(p)0}} + 2 \sum_{\nu > 0} \varepsilon_\nu V_\nu^2 \frac{R_1^1(\nu)}{R_0^{(n)0}} + \\ + 4 \sum_{\nu > 0} \gamma_{\nu, -\nu, \nu, -\nu} V_\nu^2 \frac{R_1^1(\nu)}{R_0^{(n)0}} + 4 \sum_{\substack{\nu_1 > 0 \\ \nu_2 > 0}} (\gamma_{\nu_1 \nu_2 \nu_1 \nu_2} + \gamma_{\nu_1, -\nu_2, \nu_1, -\nu_2}) V_{\nu_1}^2 V_{\nu_2}^2 \frac{R_2^2(\nu_1, \nu_2)}{R_0^{(n)0}} + \\ + 4 \sum_{\substack{\nu_1 > 0 \\ \nu_2 > 0}} \gamma_{\nu_1, -\nu_1, \nu_2, -\nu_2} U_{\nu_1} V_{\nu_1} U_{\nu_2} V_{\nu_2} \frac{R_1^1(\nu_1, \nu_2)}{R_0^{(n)0}} + \\ + 2 \sum_{\substack{\nu > 0 \\ K > 0}} (\gamma_{K \nu K \nu} + \gamma_{K, -\nu, K, -\nu}) V_K^2 V_\nu^2 \frac{R_1^1(K)}{R_0^{(p)0}} \frac{R_1^1(\nu)}{R_0^{(n)0}}.$$

Le seul terme qui modifiera les équations d'Euler-Lagrange (II.10) est la dernière sommation contenant l'interaction neutron-proton.

Les équations qui en résultent sont les suivantes :

$$(II.32) \quad (\hat{\varepsilon}_K + \Gamma_K + \Omega_K + \Lambda_K) U_K V_K + \Delta_K (U_K^2 - V_K^2) = 0,$$

$$(II.33) \quad (\hat{\varepsilon}_\nu + \Gamma_\nu + \Omega_\nu + \Lambda_\nu) U_\nu V_\nu + \Delta_\nu (U_\nu^2 - V_\nu^2) = 0.$$

Les quantités $\hat{\varepsilon}_K, \hat{\varepsilon}_\nu, \Gamma_K, \Gamma_\nu, \Delta_K, \Delta_\nu$ sont définies comme dans (II.11) à (II.13), les sommations portant respectivement sur les états proton et neutron.

La quantité Ω_K décrit les interactions d'un proton dans l'état K avec tous les neutrons.

$$(II.34) \quad \Omega_K = \sum_\nu (\gamma_{K \nu K \nu} + \gamma_{K, -\nu, K, -\nu}) V_\nu^2 \frac{R_1^1(\nu)}{R_0^{(n)0}} \frac{R_1^1(K)}{R_0^{(p)0}}.$$

La quantité Ω_ν a un sens analogue pour les neutrons :

$$(II.35) \quad \Omega_\nu = \sum_K (\gamma_{K \nu K \nu} + \gamma_{K, -\nu, K, -\nu}) V_K^2 \frac{R_1^1(K)}{R_0^{(p)0}} \frac{R_1^1(\nu)}{R_0^{(n)0}}.$$

Les coefficients Λ_K et Λ_ν sont définis par des expressions plus longues que dans

(II.17) ou (II.14), puisque la différentiation des fonctions résidus dans l'interaction neutron-proton conduit à des termes additionnels. Nous donnerons simplement ces quantités dans la formulation correspondant à (II.17) ; celle qui correspond à (II.14) se dérive facilement

$$\begin{aligned}
 \text{(II.36)} \quad \Lambda_K = & \sum_{K_1} (\varepsilon_{K_1} + 2) \gamma_{K_1, -K_1 K_1, -K_1} V_{K_1}^2 \frac{R_2^2(K_1, K) - R_1^2(K_1, K)}{R_0^{(p)0}} + \\
 & + 2 \sum_{K_1 K_2} (\gamma_{K_1 K_2 K_1 K_2} + \gamma_{K_1, -K_2 K_1, -K_2}) V_{K_1}^2 V_{K_2}^2 \frac{R_3^3(K_1, K_2, K) - R_2^3(K_1, K_2, K)}{R_0^{(p)0}} + \\
 & + 2 \sum_{K_1 K_2} \gamma_{K_1, -K_1 K_2, -K_2} U_{K_1} V_{K_1} U_{K_2} V_{K_2} \frac{R_2^3(K_1, K_2, K) - R_1^3(K_1, K_2, K)}{R_0^{(p)0}} + \\
 & + \sum_{K_1 \nu_1} (\gamma_{K_1 \nu_1 K_1 \nu_1} + \gamma_{K_1, -\nu_1 K_1, -\nu_1}) V_{K_1}^2 V_{\nu_1}^2 \frac{R_1^1(\nu_1) [R_2^2(K_1, K) - R_1^2(K_1, K)]}{R_0^{(n)0} R_0^{(p)0}} - \\
 & - \frac{E}{2} \frac{R_1^1(K) - R_0^1(K)}{R_0^{(p)0}}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(II.37)} \quad \Lambda_\nu = & \sum_{\nu_1} (\varepsilon_{\nu_1} + 2) \gamma_{\nu_1, -\nu_1 \nu_1, -\nu_1} V_{\nu_1}^2 \frac{R_2^2(\nu_1, \nu) - R_1^2(\nu_1, \nu)}{R_0^{(n)0}} + \\
 & + 2 \sum_{\nu_1 \nu_2} (\gamma_{\nu_1 \nu_2 \nu_1 \nu_2} + \gamma_{\nu_1, -\nu_2 \nu_1, -\nu_2}) V_{\nu_1}^2 V_{\nu_2}^2 \frac{R_3^3(\nu_1, \nu_2, \nu) - R_2^3(\nu_1, \nu_2, \nu)}{R_0^{(n)0}} + \\
 & + 2 \sum_{\nu_1 \nu_2} \gamma_{\nu_1, -\nu_1 \nu_2, -\nu_2} U_{\nu_1} V_{\nu_1} U_{\nu_2} V_{\nu_2} \frac{R_2^3(\nu_1, \nu_2, \nu) - R_1^3(\nu_1, \nu_2, \nu)}{R_0^{(n)0}} + \\
 & + \sum_{K_1 \nu_1} (\gamma_{K_1 \nu_1 K_1 \nu_1} + \gamma_{K_1, -\nu_1 K_1, -\nu_1}) V_{K_1}^2 V_{\nu_1}^2 \frac{R_1^1(K_1) [R_2^2(\nu_1, \nu) - R_1^2(\nu_1, \nu)]}{R_0^{(p)0} R_0^{(n)0}} - \\
 & - \frac{E}{2} \frac{R_1^1(\nu) - R_0^1(\nu)}{R_0^{(n)0}}.
 \end{aligned}$$

Dans (II.36) et (II.37) E est l'énergie totale donnée par (II.31). L'interaction neutron-proton couple les équations (II.32) et (II.33).

Nous voulons généraliser le traitement à un système au nombre impair de particules pour l'appliquer au cas d'un noyau pair-impair. Supposons que nous nous intéressions à un noyau ayant un nombre impair $2n_p + 1$ de protons et un nombre pair $2n_n$ de neutrons. Nous devons alors partir d'un état que l'on peut écrire de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 \text{(II.38)} \quad \psi_{\bar{K}} = & C \oint \xi_1^{-n_p-1} a_{\bar{K}}^+ \prod_{K \neq \bar{K}} (U_K + V_K \xi_1 a_K^+ a_{-K}^+) d\xi_1 \times \\
 & \times \oint \xi_2^{-n_n-1} \prod_{\nu} (U_\nu + V_\nu \xi_2 a_\nu^+ a_{-\nu}^+) d\xi_2 \Phi_0.
 \end{aligned}$$

Sans écrire les équations qui découlent de (II.38) mentionnons simplement les modifications qui sont introduites par le blocage de l'état proton K . Nous obtenons à nouveau l'ensemble des équations couplées (II.32) et (II.33). Γ_ν et Δ_ν sont définis comme dans (II.12) et (II.13). Les définitions de Γ_K et Δ_K sont obtenues

nues à partir de (II.42) et (II.43) en effectuant l'exclusion additionnelle de l'état K dans les fonctions résidus : $R_n^K(K_1, \dots, K_N) \rightarrow R_n^{N+1}(K_1, \dots, K_N, \bar{K})$.

Les sommations sont, bien entendu, exclusivement étendues aux états de neutron ou aux états de proton respectivement.

De plus, les quantités $\hat{\varepsilon}_K, \hat{\varepsilon}_v, \Lambda_K, \Lambda_v$ doivent être définies sous une forme quelque peu différente :

$$(II.39) \quad \hat{\varepsilon}_K = (\varepsilon_K + 2 \gamma_{K, -KK, -K}) \frac{R_1^2(\bar{K}, K)}{R_0^1(\bar{K})} + 2(\gamma_{\bar{K}\bar{K}\bar{K}} + \gamma_{\bar{K}, -K\bar{K}, -K}) \frac{R_1^2(\bar{K}, K)}{R_0^1(\bar{K})},$$

$$(II.40) \quad \hat{\varepsilon}_v = (\varepsilon_v + 2 \gamma_{v, -vv, -v}) \frac{R_1^1(v)}{R_0^{(n)0}} + \frac{1}{2} (\gamma_{Kv\bar{K}v} + \gamma_{\bar{K}, -v\bar{K}, -v}) \frac{R_1^1(v)}{R_0^{(n)0}},$$

$$(II.41) \quad \Lambda_K = \sum_{K_1} (\varepsilon_{K_1} + 2 \gamma_{K_1, -K_1K_1, -K_1}) V_{K_1}^2 \frac{R_2^3(\bar{K}, K_1, K) - R_1^3(\bar{K}, K_1, K)}{R_0^1(\bar{K})} +$$

$$+ 2 \sum_{K_1} (\gamma_{\bar{K}K_1\bar{K}K_1} + \gamma_{\bar{K}, -K_1\bar{K}, -K_1}) V_{K_1}^2 \frac{R_2^3(\bar{K}, K_1, K) - R_1^3(\bar{K}, K_1, K)}{R_0^1(\bar{K})} +$$

$$+ 2 \sum_{K_1K_2} (\gamma_{K_1K_2K_1K_2} + \gamma_{K_1, -K_2K_1, -K_2}) \times$$

$$\times V_{K_1}^2 V_{K_2}^2 \frac{R_4^4(\bar{K}, K_1, K_2, K) - R_3^4(\bar{K}, K_1, K_2, K)}{R_0^1(\bar{K})} +$$

$$+ 2 \sum_{K_1K_2} \gamma_{K_1, -K_1K_2, -K_2} U_{K_1} V_{K_1} U_{K_2} V_{K_2} \frac{R_4^4(\bar{K}, K_1, K_2, K) - R_3^4(\bar{K}, K_1, K_2, K)}{R_0^1(\bar{K})} +$$

$$+ \sum_{K_1v_1} (\gamma_{K_1v_1K_1v_1} + \gamma_{K_1, -v_1K_1, -v_1}) V_{K_1}^2 V_{v_1}^2 \frac{R_1^1(v_1)}{R_0^{(n)0}} \times$$

$$\times \frac{R_2^3(\bar{K}, K_1, K) - R_1^3(\bar{K}, K_1, K)}{R_0^1(\bar{K})} - \frac{E^{(p)}}{2} \frac{R_1^2(\bar{K}, K) - R_0^2(\bar{K}, K)}{R_0^1(\bar{K})},$$

$$(II.42) \quad \Lambda_v = \sum_{v_1} (\varepsilon_{v_1} + 2 \gamma_{v_1, -v_1v_1, -v_1}) V_{v_1}^2 \frac{R_2^2(v_1, v) - R_1^2(v_1, v)}{R_0^{(n)0}} +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{v_1} (\gamma_{\bar{K}v_1\bar{K}v_1} + \gamma_{\bar{K}, -v_1\bar{K}, -v_1}) V_{v_1}^2 \frac{R_2^2(v_1, v) - R_1^2(v_1, v)}{R_0^{(n)0}} +$$

$$+ 2 \sum_{v_1v_2} (\gamma_{v_1v_2v_1v_2} + \gamma_{v_1, -v_2v_1, -v_2}) V_{v_1}^2 V_{v_2}^2 \frac{R_3^3(v_1, v_2, v) - R_2^3(v_1, v_2, v)}{R_0^{(n)0}} +$$

$$+ 2 \sum_{v_1v_2} \gamma_{v_1, -v_1v_2, -v_2} U_{v_1} V_{v_1} U_{v_2} V_{v_2} \frac{R_3^3(v_1, v_2, v) - R_2^3(v_1, v_2, v)}{R_0^{(n)0}} +$$

$$+ \sum_{K_1v_1} (\gamma_{K_1v_1K_1v_1} + \gamma_{K_1, -v_1K_1, -v_1}) V_{K_1}^2 V_{v_1}^2 \frac{R_1^2(\bar{K}, K_1)}{R_0^1(\bar{K})} \frac{R_2^2(v_1, v) - R_1^2(v_1, v)}{R_0^{(n)0}} -$$

$$- \frac{E^{(n)}}{2} \frac{R_1^1(v) - R_0^1(v)}{R_0^{(n)0}}.$$

Les quantités $E^{(p)}$, $E^{(n)}$ apparaissant dans (II.41) et (II.42) sont les parties de l'énergie totale E qui dépendent des coefficients U_K , V_K des protons ou U_v , V_v des neutrons respectivement.

Utilisant nos définitions de ε_v , ε_K , Γ_v , Γ_K , Δ_v , Δ_K , nous pouvons écrire ces quantités comme suit :

$$(II.43) \quad E^{(p)} = \sum_K (2 \hat{\varepsilon}_K + \Gamma_K + 2 \Omega_K) V_K^2 + 2 \sum_K \Delta_K U_K V_K,$$

$$(II.44) \quad E^{(n)} = \sum_v (2 \hat{\varepsilon}_v + \Gamma_v + 2 \Omega_v) V_v^2 + 2 \sum_v \Delta_v U_v V_v.$$

L'énergie totale n'est pas égale à la somme $E^{(n)} + E^{(p)}$ mais est donnée par

$$(II.45) \quad E = \sum_K (2 \hat{\varepsilon}_K + \Gamma_K + \Omega_K) V_K^2 + 2 \sum_K \Delta_K U_K V_K + \varepsilon_{\bar{K}} + \\ + \sum_v (2 \hat{\varepsilon}_v + \Gamma_v + \Omega_v) V_v^2 + 2 \sum_v \Delta_v U_v V_v.$$

Dans le cas où l'on aurait un nombre impair de neutrons et un nombre pair de protons il y aurait évidemment lieu d'interchanger les définitions (II.39), (II.40) et (II.41), (II.42).

Mentionnons qu'en remplaçant simplement les énergies à une particule des protons ε_K par la quantité $\varepsilon_K + 2(\frac{1}{2} \gamma_{K\bar{K}\bar{K}K} + \frac{1}{2} \gamma_{K,-K\bar{K},-K})$ et les énergies à une particule ε_v des neutrons par la quantité $\varepsilon_v + \frac{1}{2}(\frac{1}{2} \gamma_{\bar{K}v\bar{K}v} + \frac{1}{2} \gamma_{\bar{K},-v\bar{K},-v})$ et en bloquant l'état additionnel $\bar{K}$ dans toutes les fonctions résidus des protons on obtient, à partir des équations variationnelles d'un noyau pair-pair, les équations correspondantes du noyau pair-impair voisin avec un proton additionnel dans l'état $\bar{K}$. De façon analogue, on trouverait les équations d'un noyau ayant un nombre impair de neutrons et un nombre pair de protons.

4. Utilisation de la méthode du col pour l'évaluation des fonctions résidus. —

Bayman [19] a montré qu'utiliser la méthode du col pour l'évaluation des intégrales $R_n^N(v_1, \dots, v_N)$ est équivalent à la théorie de B. C. S. Bayman fait l'hypothèse que les cols correspondant à différentes intégrales R_n^N sont presque égaux et il montre que c'est bien le cas pour une densité de niveaux constante. Nous reformulons cette preuve de façon à être complet. Nous choisissons une formulation qui ne nous impose de faire aucune hypothèse, bien qu'utilisant la méthode du col. Nous montrons alors que des critères de validité moins astreignants peuvent être donnés pour la méthode du col, qui sont généralement remplis dans les applications de la théorie de B. C. S. à la physique nucléaire.

Nous écrivons les fonctions résidus (II.5) de la manière suivante :

$$(II.46) \quad R_n^N(v_1, \dots, v_N) = \frac{1}{2\pi i} \oint e^{f(z)} \chi_n^N(z) dz,$$

où

$$(II.47) \quad f(z) = -n_0 \text{Log } z + \sum_{v=1}^{N_0} \text{Log } (U_v^2 + z V_v^2),$$

$$(II.48) \quad \chi_n^N(z) = z^{n-1} / \prod_{v=v_1, \dots, v_N} (U_v^2 + z V_v^2);$$

$f(z)$ et $\chi_n^N(z)$ sont des fonctions analytiques de z sur le contour d'intégration. Le contour d'intégration peut être choisi tel qu'il croise le col z_0 de $f(z)$ sur une ligne de plus grande pente, le col étant défini par

$$(II.49) \quad f'(z_0) = -\frac{n_0}{z_0} + \sum_v \frac{V_v^2}{U_v^2 + z_0 V_v^2} = 0.$$

Nous pouvons ainsi utiliser la méthode du col pour évaluer les intégrales résidus. Nous obtenons

$$(II.50) \quad R_n^N(v_1, \dots, v_N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\exp[f(z_0)] \chi_n^N(z_0, v_1, \dots, v_N)}{|f''(z_0)|^{1/2}},$$

avec

$$(II.51) \quad f''(z_0) = \frac{n_0}{z_0^2} - \sum_v \frac{V_v^4}{(U_v^2 + z_0 V_v^2)^2}.$$

L'énergie totale E (II.8) comme les équations variationnelles (II.10) contiennent seulement des quotients de fonctions résidus. Utilisant la méthode du col, l'énergie totale E sera donnée par

$$(II.52) \quad E = 2 \sum_v \varepsilon_v V_v^2 \chi_1^1(z_0, v) + 4 \sum_v \mathcal{V}_{v,-vv,-v} V_v^2 \chi_1^1(z_0, v) + \\ + 4 \sum_{v_1 v_2} (\mathcal{V}_{v_1 v_2 v_1 v_2} + \mathcal{V}_{v_1, -v_2 v_1, -v_2}) V_{v_1}^2 V_{v_2}^2 \chi_2^2(z_0, v_1, v_2) + \\ + 4 \sum_{v_1 v_2} \mathcal{V}_{v_1, -v_1 v_2, -v_2} U_{v_1} V_{v_1} U_{v_2} V_{v_2} \chi_1^2(z_0, v_1, v_2).$$

Nous savons que l'ensemble des V_v et U_v n'est pas unique. Soit un ensemble de V_v et U_v donné qui corresponde à un col $z_0 \neq 1$; nous pouvons toujours trouver une transformation telle que pour la solution équivalente $\tilde{U}_v, \tilde{V}_v$ des équations variationnelles le col soit à $z_0 = 1$.

Pour $z_0 = 1$ l'équation (II.49) est la condition subsidiaire requise dans la théorie de la supraconductivité

$$(II.53) \quad \sum_v V_v^2 = \langle \psi_{\text{BCS}} | \sum_{\pm v} a_v^\dagger a_v | \psi_{\text{BCS}} \rangle = n_0$$

et (II.52) est l'énergie totale de B. C. S. Nous pouvons encore raisonner de la façon suivante : nous pouvons multiplier E par z_0 et considérer la variation de $E z_0$, puisque E sera stationnaire pourvu que $E z_0$ le soit et vice versa. (II.49) peut être écrit

$$(II.54) \quad n_0 - \sum_v \frac{z_0 V_v^2}{U_v^2 + z_0 V_v^2} = 0.$$

Nous remarquons que $E z_0$ comme (II.54) contient z_0 dans la combinaison exclusive $z_0^{1/2} V_v$. Nous pouvons donc choisir $z_0 = 1$ sans perte de généralité. Ainsi nous avons montré qu'utiliser la méthode du col dans la théorie avec un nombre de particules conservé est équivalent au traitement usuel de B. C. S., si l'on choisit le col à $z_0 = 1$. Dans ce cas toutes les fonctions résidus deviennent égales si elles sont évaluées par la méthode du col.

Dans les équations d'Euler-Lagrange (II.10) le terme $\hat{\varepsilon}_v U_v V_v$ contient un élément de matrice diagonal $\mathcal{V}_{v,-vv,-v}$ de la forme $2 \mathcal{V}_{v,-vv,-v} [R_1^1(v)/R_0^0] U_v V_v$.

On peut encore écrire ce terme

$$(II.55) \quad 2 \mathcal{V}_{v,-vv,-v} \frac{R_1^1(v)}{R_0^0} U_v V_v = 4 \mathcal{V}_{v,-vv,-v} \frac{R_1^1(v)}{R_0^0} V_v^2 U_v V_v + \\ + 2 \mathcal{V}_{v,-vv,-v} \frac{R_1^1(v)}{R_0^0} U_v V_v (U_v^2 - V_v^2).$$

Ainsi, si l'on définit $\hat{\varepsilon}_v, \Gamma_v, \Delta_v$ par

$$(II.56) \quad \varepsilon_v = \varepsilon_v R_1^1(v)/R_0^0,$$

$$(II.57) \quad \Gamma_v = 4 \sum_{v_1} (\gamma_{vv_1vv_1} + \gamma_{v,-v_1v,-v_1}) V_{v_1}^2 \frac{R_2^2(v_1, v)}{R_0^0} + 4 \gamma_{v,-vv,-v} V_v^2 \frac{R_1^1(v)}{R_0^0},$$

$$(II.58) \quad \Delta_v = 2 \sum_{v_1} \gamma_{v,-vv_1,-v_1} U_{v_1} V_{v_1} \frac{R_1^1(v_1, v)}{R_0^0} + 2 \gamma_{v,-vv,-v} U_v V_v \frac{R_1^1(v)}{R_0^0},$$

ces quantités deviennent les quantités correspondantes de la théorie de B. C. S. si la méthode du col est appliquée. La quantité Δ_v tend vers 0 dans cette limite.

Avant de conclure ce paragraphe il convient de faire quelques remarques sur l'utilisation de la méthode du col. Les intégrales du type

$$(II.59) \quad I = \int_A^B e^{t f(z)} \chi(z) dz,$$

où t est réel et positif et $f(z)$, $\chi(z)$ sont analytiques peuvent être approximées par la méthode de la plus grande pente [22]. Si $f(z)$ présente un col z_0 quelque part entre A et B, le contour d'intégration doit être choisi tel qu'il croise le col sur une ligne de plus grande pente. Dans ce cas l'intégrale I peut être approximée par [22]

$$(II.60) \quad I \simeq \frac{e^{t f(z_0)} \chi(z_0) \sqrt{2\pi} e^{i\alpha}}{|t f''(z_0)|^{1/2}}.$$

Dans cette expression α est l'angle entre l'axe réel positif et la direction du contour en z_0 . Si $f''(z_0) \neq 0$ on doit s'attendre à ce que $f(z)$ ait la forme suivante au voisinage de z_0 :

$$(II.61) \quad f(z) = f(z_0) + \frac{1}{2} (z - z_0)^2 f''(z_0) + \dots$$

La direction du contour en z_0 doit être telle que $(z - z_0)^2 f''(z_0)$ soit réel et négatif [22]. (II.60) représente le premier terme d'un développement asymptotique ([22] p. 502). Les termes d'ordre supérieur de ce développement sont en général difficiles à obtenir. Il est par conséquent difficile d'obtenir une estimation valable de la précision de la formule (II.60). L'erreur sera certainement petite si les contributions dominantes à l'intégrale viennent du voisinage immédiat du col. Dans le cas de nos intégrales résidus, le col $z_0 = 1$ et nous intégrons sur la circonférence unité. Les quantités $f(z)$, $\chi(z)$ sont définies dans (II.47) et (II.48). Soit φ l'angle pour lequel l'exponentielle $\exp[f(z)]$ est tombée à $1/e$ de sa valeur à $z_0 = 1$. φ est donné par

$$(II.62) \quad \varphi = \sqrt{2}/\sqrt{|f''(z_0)|} = \sqrt{2}/\sqrt{|n_0 - \sum_v V_v^4|} = \sqrt{2}/\sqrt{|\sum_v U_v^2 V_v^2|}.$$

Pour que la méthode du col soit applicable, 2φ devrait être petit comparé à la longueur totale du parcours 2π ou

$$(II.63) \quad \sqrt{\sum_v U_v^2 V_v^2} \gg \sqrt{2/\pi} \simeq 1/2. \quad V_v^2 \uparrow$$

Le produit $U_v V_v$ est différent de 0 seulement si V_v aussi bien que U_v sont substantiellement différents de 0, c'est-à-dire seulement dans la région II où V_v^2 tombe d'une valeur voisine de 1 à presque 0 (fig. 1).

Bayman [19] pose

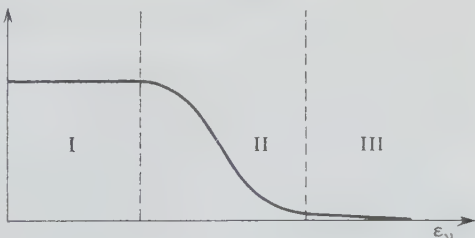


FIG. 1.

$$(II.64) \quad \sum_{\nu} U_{\nu}^2 V_{\nu}^2 \simeq \frac{1}{4} \Omega_{\text{eff}},$$

où Ω_{eff} est le nombre d'états ν dans la région II. Avec ceci nous obtenons le critère

$$(II.65) \quad \sqrt{\Omega_{\text{eff}}} \gg 1.$$

Plus Ω_{eff} est grand, plus la méthode du col est valable. De grands Ω_{eff} sont favorisés par de fortes interactions d'appariement. D'autre part, l'état de B. C. S. conserve le nombre de particules dans le cas d'une surface de Fermi abrupte.

Ainsi on peut s'attendre à ce que dans la limite de très petits Ω_{eff} les erreurs provenant de la non-conservation du nombre de particules soient aussi petites [19].

Les conditions (II.62) ou (II.64) seront en général pauvrement remplies dans les applications nucléaires. Toutefois, puisque seuls des quotients d'intégrales résidus entrent dans la théorie, les erreurs dues à l'utilisation de la méthode du col seront en fait beaucoup plus petites.

III. Résolution des équations variationnelles et application

1. Résolution des équations variationnelles et discussion des solutions. —

Etudions tout d'abord l'unicité des solutions en U et V des équations variationnelles. Un simple examen de la fonction d'essai montre que seul le rapport $V_{\text{km}}/U_{\text{km}}$ est défini par le principe variationnel. Ceci est valable pour les deux formalismes développés respectivement dans les chapitres I et II. On voit alors aisément que, même en tenant compte de la condition restrictive (I.11), l'ensemble des U_{km} et V_{km} est seulement déterminé à la transformation suivante près entre ensembles équivalents de U_{km} et V_{km} :

$$(III.1) \quad \tilde{V}_{\text{km}} = \frac{\alpha V_{\text{km}}}{\sqrt{U_{\text{km}}^2 + \alpha^2 V_{\text{km}}^2}} \quad \text{et} \quad \tilde{U}_{\text{km}} = \frac{U_{\text{km}}}{\sqrt{U_{\text{km}}^2 + \alpha^2 V_{\text{km}}^2}},$$

α étant un facteur quelconque.

Montrons maintenant que l'on peut faire l'hypothèse que les V_{km} et U_{km} sont réels sans pour autant restreindre la généralité.

En supposant que l'on ait des coefficients V_{km} et U_{km} complexes, l'énergie totale E est donnée par (I.16), c'est-à-dire

$$(III.2) \quad E_{\text{BCS}} = 2 \sum_{\text{km}} (\tilde{\epsilon}_{\text{km}} - \lambda) V_{\text{km}}^* V_{\text{km}} + \\ + 4 \sum_{\text{kk}'\text{mm}'} \tilde{\mathcal{V}}_{\text{kmk}, -\text{mk}'\text{m}'\text{k}', -\text{m}'} V_{\text{km}}^* V_{\text{k}'\text{m}'} U_{\text{k}'\text{m}'}^* U_{\text{km}} - \\ - 4 \sum_{\text{kk}'\text{mm}'} (\tilde{\mathcal{V}}_{\text{kmk}'\text{m}'\text{k}'\text{m}'\text{km}} + \tilde{\mathcal{V}}_{\text{kmk}', -\text{m}'\text{k}', -\text{m}'\text{km}}) V_{\text{km}}^* V_{\text{km}} V_{\text{k}'\text{m}'}^* V_{\text{k}'\text{m}'}.$$

On peut écrire les U_{km} et V_{km} comme suit :

$$(III.3) \quad V_{\text{km}} = |V_{\text{km}}| \exp(i \arg V_{\text{km}}), \quad U_{\text{km}} = |U_{\text{km}}| \exp(i \arg U_{\text{km}}).$$

Pour simplifier le raisonnement et sans restreindre pour autant la généralité de celui-ci, on peut poser

$$(III.4) \quad \arg U_{\text{km}} = 0.$$

Nous choisissons la représentation de façon que les éléments de matrice soient tous réels. Nous avons alors la condition de symétrie

$$(III.5) \quad \lambda_{k_1 m_1 k_1, -m_1 k_2 m_2 k_2, -m_2} = \lambda_{k_2 m_2 k_2, -m_2 k_1 m_1 k_1, -m_1}$$

et, à l'aide de (III.5), (III.4) et (III.3), nous pouvons écrire à nouveau l'énergie sous la forme

$$(III.6) \quad E_{BCS} = 2 \sum_{km} (\tilde{\epsilon}_{km} - \lambda) |V_{km}|^2 + 4 \sum_{kk'mm'} \tilde{\lambda}_{kmk, -mk'm'k', -m'} \times \\ \times |V_{km}| |V_{k'm'}| |U_{k'm'}| |U_{km}| \cos(\arg V_{k'm'} - \arg V_{km}) - \\ - 4 \sum_{kk'mm'} (\tilde{\lambda}_{kmk'm'k'm'km} + \tilde{\lambda}_{kmk', -m'k', -m'km}) |V_{km}|^2 |V_{k'm'}|^2.$$

La variation en fonction des quantités U_{km} , V_{km} conduit à l'ensemble des équations que nous avons déjà dérivées, à la différence près que tous les éléments de matrice du type d'appariement sont multipliés par $\cos(\arg V_{k'm'} - \arg V_{km})$. La variation en fonction des phases conduit aux équations suivantes :

$$(III.7) \quad \sum_{k'm'} \lambda_{kmk, -mk'm'k', -m'} |U_{k'm'}| |V_{k'm'}| \sin(\arg V_{k'm'} - \arg V_{km}) = 0.$$

Celles-ci admettent la solution triviale

$$(III.8) \quad \arg V_{km} = \text{Cte}$$

qui correspond à une solution avec coefficients U_{km} et V_{km} réels et positifs, ceux que nous avons considérés pour dériver les équations d'Euler-Lagrange. Nous affirmons que cette solution correspond à la plus petite énergie E , pourvu que les éléments de matrice du type d'appariement soient tous négatifs. C'est le cas pour une interaction attractive et la convention de phase suivante : toutes les fonctions d'onde à une particule avec un nombre quantique magnétique négatif sont définies par

$$(III.9) \quad |j l - m\rangle = (-1)^{j+l-m} |j l m\rangle.$$

On peut prouver ceci de la façon suivante. Supposons que l'on ait trouvé une solution des équations d'Euler-Lagrange (I.22) et (I.25) avec un ensemble de phases $\arg V_{km} \neq \text{Cte}$ et que E_0 soit l'énergie correspondant à cette solution. Il est alors possible de trouver une énergie plus basse $E_1 < E_0$ en remplaçant tous les facteurs cosinus par 1. Puisque l'ensemble des $|U_{km}|$, $|V_{km}|$ est compatible seulement avec l'ensemble des phases non constantes, E_1 ne correspond pas à une solution du problème variationnel. Mais nous pouvons déterminer le minimum de E_1 par variation de $|V_{km}|$ et $|U_{km}|$ conservant

$$(III.10) \quad |U_{km}|^2 + |V_{km}|^2 = 1.$$

Ces variations conduisent à l'énergie totale E_2 qui est inférieure ou égale à E_1 ,

$$(III.11) \quad E_2 \leq E_1 < E_0,$$

pourvu que la seconde variation de $\langle \psi | \mathcal{H} | \psi \rangle$ soit positive au voisinage de notre solution, ce qui doit être le cas pour toute solution physique raisonnable.

Nous avons élaboré un programme susceptible de résoudre simultanément les équations de Belyaev et de Hartree-Bogoliubov à l'aide d'un ordinateur IBM 7090. Le procédé en est compliqué principalement du fait de la non-linéarité des équations couplées. La résolution de ce programme est très longue, la durée de la résolution dépendant bien entendu essentiellement des critères de précision que l'on impose aux variables mises en jeu dans les processus d'itération. Avec

les critères les moins exigeants possibles la durée de la résolution se chiffre encore en heures pour un noyau donné. Or ce programme doit être passé plusieurs fois dans la machine, certains paramètres nécessitant des ajustements par tâtonnements. En outre, nous désirons que nos calculs couvrent une zone aussi étendue que possible de la table nucléaire périodique. C'est donc en semaines qu'il aurait fallu chiffrer la durée des calculs à la machine nécessaires à la réalisation de nos projets. Aussi, avons-nous dû renoncer à un tel procédé et orienter nos calculs différemment.

Nous avons extrait de notre programme initial global, donnant les U , V et D , les parties concernant la résolution des seules équations de Belyaev, pour faire un nouveau programme, notablement plus rapide, résolvant ces équations avec un ensemble de valeurs d'essai pour les coefficients D et calculant l'énergie de B. C. S. totale du système. Pour déterminer ces valeurs d'essai nous avons eu recours à un modèle à particule indépendante.

Dans un tel modèle (celui de Nilsson) les coefficients D de la transformation sont exprimés en fonction de la déformation au moyen d'un seul paramètre γ . On peut donc tracer pour chaque noyau la courbe représentant l'énergie totale de B. C. S. en fonction de ce paramètre et observer la situation des minima de ces courbes, ceux-ci indiquant les formes d'équilibre des noyaux considérés.

Pour s'assurer de la validité de ces résultats il convenait en outre de vérifier que cet ensemble d'essai de D était suffisamment proche de celui que l'on aurait obtenu par résolution du programme global, ceci en vue de conserver à notre traitement le caractère d'autocompatibilité souhaité.

TABEAU II

m \ j					j \ K
	1/2	3/2	5/2	7/2	
1/2	849	433	266	144	1
	852	428	280	117	
	351	— 727	330	— 490	2
	316	— 764	378	— 417	
	157	298	— 594	— 730	3
	217	176	— 627	— 727	
	362	— 442	— 684	454	4
	357	— 451	— 621	532	
3/2		944	— 204	259	1
		953	— 217	210	
		— 21	745	666	2
		75	844	532	
		329	635	— 699	3
		293	491	— 820	

Dans chaque case, le chiffre supérieur désigne la valeur de D d'essai, le chiffre inférieur désigne la solution autocompatible. Tous ces chiffres sont à multiplier par 10^{-3} . K est un indice de programme numérotant les diverses valeurs de l'indice k du traitement sans remise en ordre après diagonalisation.

Pour faire cette vérification nous avons résolu le programme global dans certains cas typiques en utilisant comme ensemble d'essai pour les D celui qui, dans la résolution précédente, correspondait à la valeur de η contrôlée la plus proche de $\eta_{\min}$, valeur de η pour laquelle la courbe accuse un minimum, ce qui a pour effet de réduire considérablement le temps de convergence du processus d'itération.

Cette comparaison s'est révélée favorable à notre procédé de remplacement. Nous avons consigné dans le tableau II, à titre d'exemple, quelques valeurs de D obtenues par les deux voies. On peut remarquer que les écarts sont faibles pour les plus grandes valeurs de D .

2. Application à l'étude des formes d'équilibre dans la région de déformation centrée sur les terres rares. — On sait que certains noyaux, ceux qui correspondent à des configurations à un grand nombre de particules en dehors des couches complètes, n'ont pas une forme d'équilibre à symétrie sphérique [23]. Au contraire, la structure des bandes de rotation observées implique que ceux-ci soient déformés, conservant toutefois une symétrie axiale et une symétrie par rapport au plan perpendiculaire à l'axe de symétrie et passant par le centre du système.

De nombreux calculs ont été faits pour estimer cette déformation, les plus récents tenant compte des phénomènes d'appariement. Les tout premiers calculs [24] montrèrent que l'on pouvait obtenir une estimation de l'énergie nucléaire totale en fonction de la déformation en sommant les énergies à une particule de Nilsson [25]. La déformation correspond alors au minimum de l'énergie ainsi sommée. Dans ce procédé simple, chaque nucléon est associé à une orbitale donc née et l'énergie est calculée pour chaque configuration.

L'introduction du modèle d'appariement, qui entraîne une modification de l'allure de la surface de Fermi, a l'avantage de rendre possible le remplissage partiel de nombreux niveaux.

Les positions respectives des zones de déformation nucléaire sont matérialisées au sein de la table nucléaire périodique dans la figure 2.

Il nous a paru intéressant d'étudier [21] l'une de ces zones. Notre choix se porta sur la zone 4, celle des noyaux lourds pour lesquels nous possédions une bonne connaissance ⁽¹⁾ des énergies à une particule nécessaires pour nos calculs. Il nous est malheureusement très vite apparu que nous ne pourrions pas résoudre nos équations dans cette région avec le calculateur IBM 7090 dont nous disposions. En effet, le nombre des éléments de matrice de l'interaction dépassait celui des mémoires de la machine.

Il nous a donc fallu descendre dans la table périodique vers des noyaux plus légers, c'est-à-dire étudier la zone 2 centrée en gros sur les terres rares et limitée par les deux noyaux doublement magiques ^{132}Sn et ^{208}Pb .

L'application de notre traitement consistait alors à considérer que les noyaux de cette région sont constitués d'une part d'un cœur inerte sphérique (^{132}Sn)

⁽¹⁾ H. J. Mang qui a activement collaboré à ce travail connaissait en effet particulièrement bien cette région pour avoir longtemps étudié l'émission α .

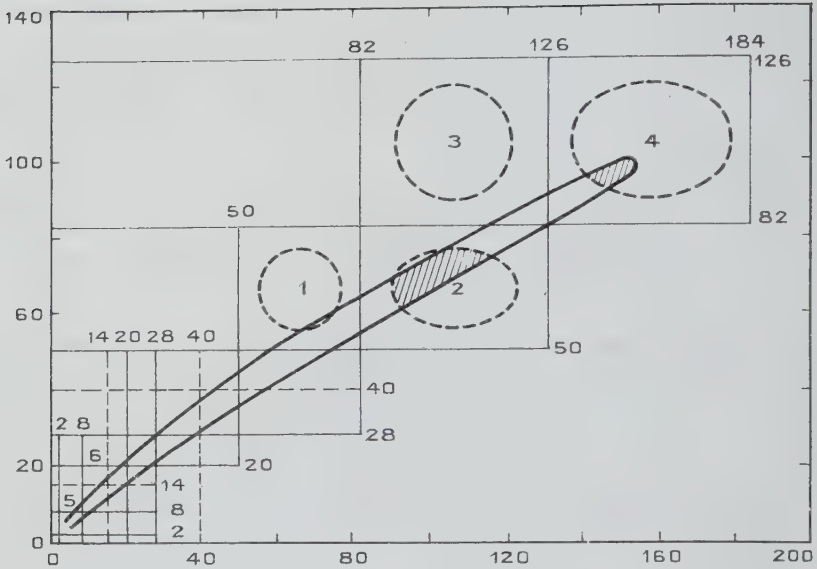


Fig. 2. — Représentation schématique de la table nucléaire périodique faisant apparaître les couches complètes de neutrons (lignes verticales) et de protons (lignes horizontales). La zone des noyaux ayant été étudiés expérimentalement est représentée par le contour de forme allongée. Les zones hachurées représentent les régions où l'on a pu observer expérimentalement une déformation. Les zones au contour pointillé représentent les régions où l'on peut s'attendre théoriquement à trouver une déformation. Cette figure est empruntée à un article traitant d'une systématique de la déformation nucléaire [26]. En abscisse, nombre de neutrons ; en ordonnée, nombre de protons.

composé de 50 protons et 82 neutrons et, d'autre part, de certains nombres pair de neutrons et pair de protons en dehors de ces couches complètes.

Nous devons définir maintenant les états disponibles pour les nucléons extérieurs au cœur. Il faut, bien entendu, que le nombre de ces états soit le plus grand possible. Nous voulons étudier tous les noyaux compris entre ^{132}Sn et ^{208}Pb , c'est-à-dire qu'il faudra au minimum considérer tous les états à remplir par les neutrons et les protons numérotés respectivement de 82 à 126 et de 50 à 82.

Si l'on se reporte au schéma de Nilsson (fig. 3) on voit que ces états sont les suivants :

neutrons, $p_{1/2}$, $p_{3/2}$, $f_{5/2}$, $f_{7/2}$, $h_{9/2}$, $i_{13/2}$;

protons, $s_{1/2}$, $d_{3/2}$, $d_{5/2}$, $g_{7/2}$, $h_{11/2}$.

Si l'on dénombre les éléments de matrice correspondants dans notre traitement on voit que le nombre de mémoires de la machine est assez grand pour introduire les niveaux supplémentaires suivants : $h_{11/2}$ pour les neutrons et $g_{9/2}$ pour les protons. Ceci permet de réduire à 40 protons et 70 neutrons le cœur sphérique inerte.

Dans une première série de calculs nous avons utilisé une interaction du type δ . Une telle interaction n'était certes pas très réaliste mais elle avait le mérite d'être simple nous permettant d'essayer rapidement l'ensemble de nos programmes.

INTERACTIONS POUR LES NOYAUX DÉFORMÉS

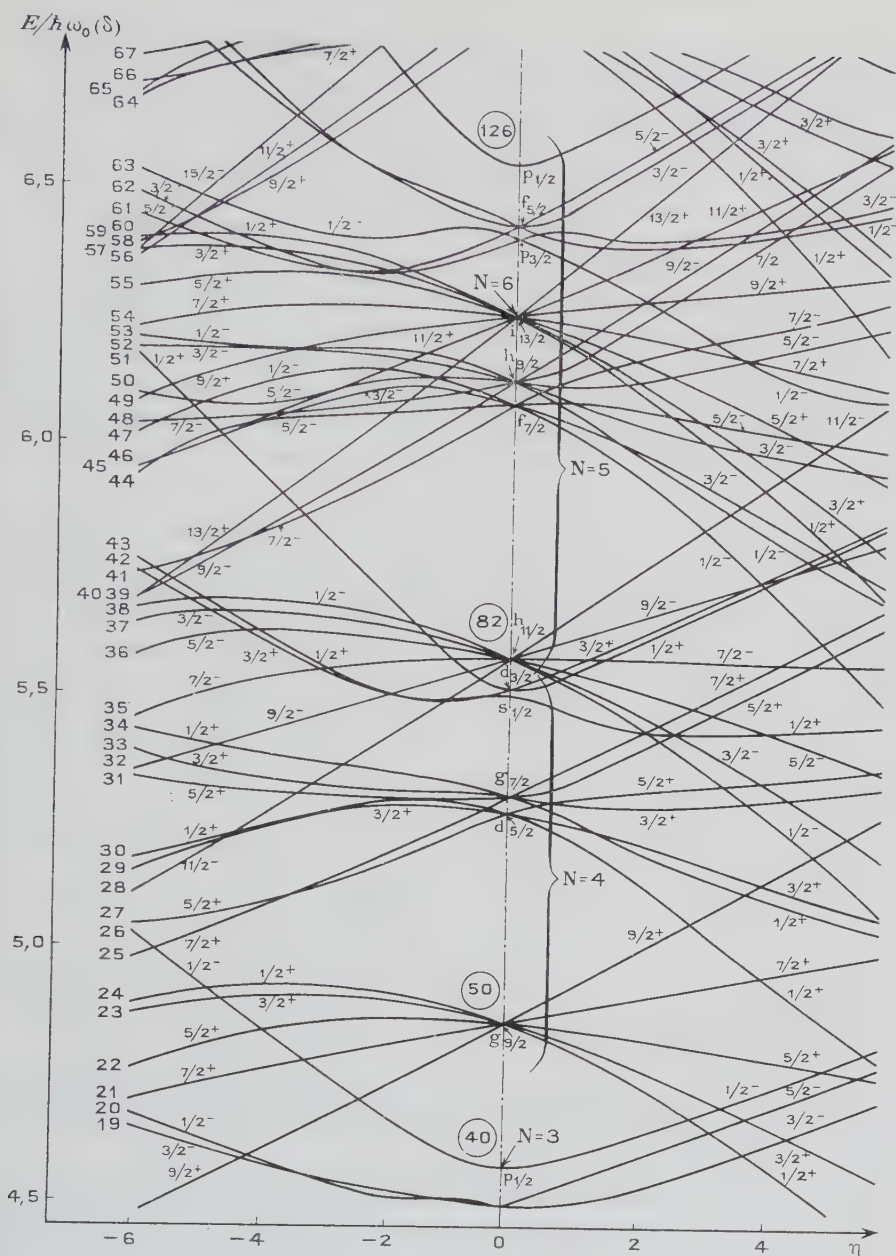


FIG. 3.

Nous possédons en outre un programme donnant les éléments de matrice de cette interaction dont nous avons eu besoin dans une étude antérieure [18].

Avec cette interaction les paramètres du problème étaient les suivants : les constantes de force V_{nn} , V_{pp} et V_{np} des interactions neutron-neutron, proton-

proton et neutron-proton et les énergies à une particule des états énumérés plus haut pour les neutrons et pour les protons.

Pour déterminer les valeurs des constantes de force nous avons comparé les différences de masses pair-impair de plusieurs noyaux à deux fois la plus petite énergie de quasi-particule, ceci séparément pour les neutrons et pour les protons. Nous adoptons pour ces différences de masse les définitions suivantes :

pour les neutrons, $\Delta_N(A) = B_{N-1}(A-1) + B_{N+1}(A+1) - 2 B_N(A)$;

pour les protons, $\Delta_Z(A) = B_{Z-1}(A-1) + B_{Z+1}(A+1) - 2 B_Z(A)$.

Cette comparaison permet de réduire suffisamment le champ d'incertitude de ces paramètres bien qu'elle puisse sembler peu satisfaisante à deux points de vue :

1° les masses des noyaux de la région que nous étudions sont connues avec une précision de l'ordre de 100 à 300 keV en moyenne [27], c'est-à-dire qu'il ne faut pas espérer une précision meilleure que 500 keV dans les cas les moins défavorables pour des différences de masses qui se situent entre 1 et 4 MeV en moyenne ;

2° les ajustements de ces paramètres ne peuvent se faire qu'au voisinage du ^{208}Pb ou du ^{132}Sn car il serait prohibitif de vouloir procéder par tâtonnements dans la zone déformée, ceci impliquant de longues heures de calcul à la machine.

Nous nous trouvions également devant de grandes difficultés pour choisir les valeurs des énergies à une particule. Dans notre formalisme devraient entrer les énergies correspondant au cœur plus un neutron ou plus un proton. Ces énergies n'étant pas connues, nous avons fait une première série de calculs en fixant des valeurs inspirées du schéma de Nilsson (fig. 3) et corrigées en fonction des récents résultats de Cohen. Nous verrons plus loin que ces valeurs nous conduiront à des résultats tout à fait incompatibles avec les résultats expérimentaux pour une interaction plus réaliste. Mais avec une force δ , les calculs ayant seulement une valeur de contrôle nous nous sommes contenté de ce choix.

Les résultats de ces calculs ne révèlent de déformation pour aucun des noyaux de la zone qui nous intéresse (fig. 4). On pouvait s'attendre à ce résultat.

L'étape suivante consistait donc à choisir une interaction un peu plus réaliste. Ayant déjà calculé les éléments de matrice d'une force δ , le plus simple consistait à considérer un mélange de force δ et de force quadrupolaire. Il restait alors à calculer les éléments de matrice de cette force quadrupolaire et à ajouter les éléments correspondant aux deux types de forces avec une certaine pondération α . L'usage de cette force $\delta + \alpha q$ a l'inconvénient de faire intervenir ce nouveau paramètre α .

Nous pouvons nous faire une première idée de la valeur à attribuer à α en regardant les calculs faits précédemment avec un mélange pondéré de force d'appariement constante et de force quadrupolaire, par exemple dans le travail de Kisslinger & Sorensen [28]. La comparaison n'est pas immédiate puisque nous avons une force δ ; néanmoins nous pouvons fixer ainsi un ordre de grandeur, nous réservant de faire varier α autour de cette valeur. L'étude des résultats obtenus en faisant varier ce paramètre nous a conduit à adopter la valeur suivante : $\alpha \simeq 0,008$. Puis nous recherchons les minima sur les courbes donnant l'énergie de B. C. S. en fonction de la déformation pour des valeurs de η positives

INTERACTIONS POUR LES NOYAUX DÉFORMÉS

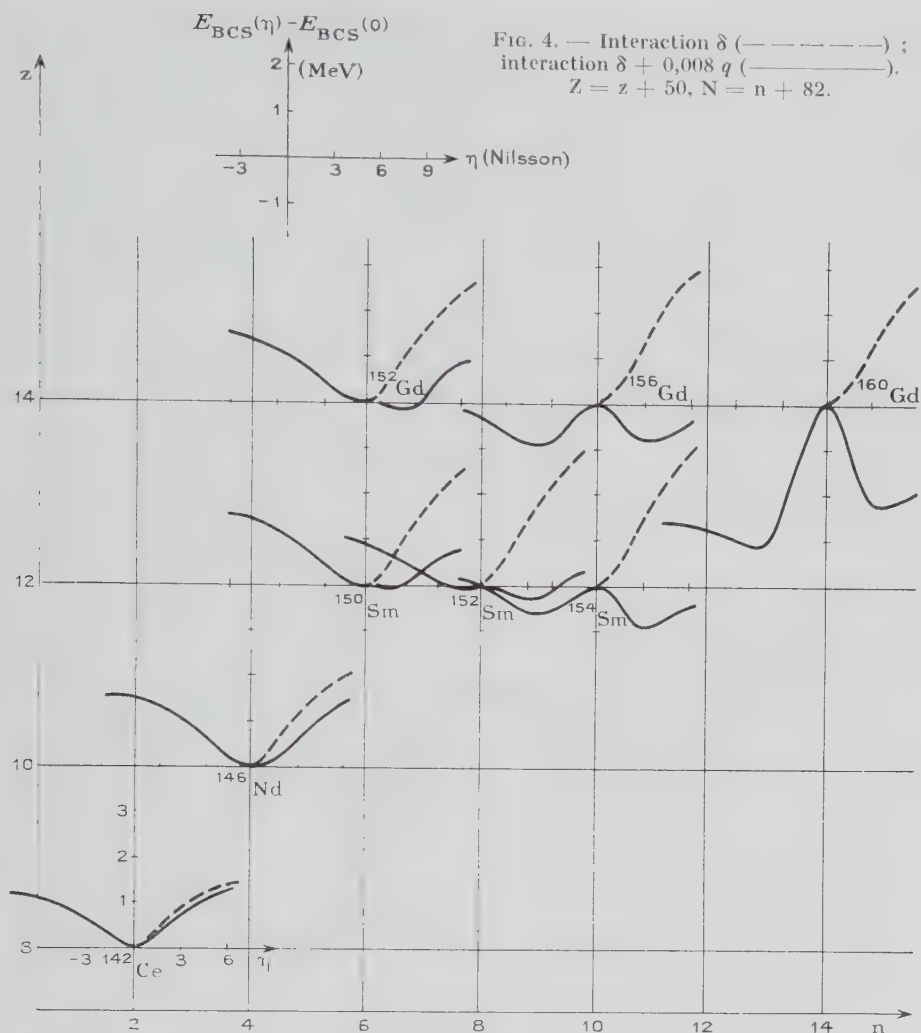


FIG. 4. — Interaction δ (---) ;
interaction $\delta + 0,008 q$ (—).
 $Z = z + 50, N = n + 82$.

comme nous l'avons fait avec la force δ seule. L'allure des courbes donne un accord qualitatif satisfaisant avec les données expérimentales (fig. 4), c'est-à-dire qu'en se déplaçant le long de la table nucléaire périodique du ^{132}Sn vers le ^{208}Pb on trouve tout d'abord une zone où les noyaux sont sphériques dans le voisinage du ^{132}Sn puis une forte et soudaine déformation au voisinage des Sm. Cette déformation atteint rapidement un maximum, connaît un palier, puis décroît lentement jusqu'au voisinage du ^{208}Pb où l'on retrouve une zone de sphéricité.

Nous aurions eu tout lieu de nous réjouir de ces résultats si nous n'avions eu la curiosité de poursuivre ces calculs de façon à compléter les courbes dans la région des η négatifs. Nous avons alors noté que les courbes accusaient un minimum plus bas du côté des η négatifs pour les noyaux les plus déformés (fig. 4).

Ceci va à l'encontre de tous les résultats expérimentaux, exigeant un moment quadrupolaire positif, c'est-à-dire une forme allongée pour ces noyaux.

Il convenait donc de mettre en cause le choix assez arbitraire que nous avons fait des énergies à une particule. Pour approcher les valeurs exactes nous avons utilisé notre programme au voisinage du ^{208}Pb pour comparer les résultats aux niveaux mieux connus de cette région. Puis nous avons ajusté par tâtonnements les énergies de départ de façon à obtenir le schéma final convenable. Ceci représente un grand nombre de calculs car, chaque fois que l'on change les valeurs des énergies à une particule, il y a lieu de refaire une détermination des constantes de force.

En vue d'augmenter la précision de ces travaux d'ajustement nous avons calculé également les moments quadrupolaires dans le cadre de notre formalisme pour les comparer aux valeurs expérimentales.

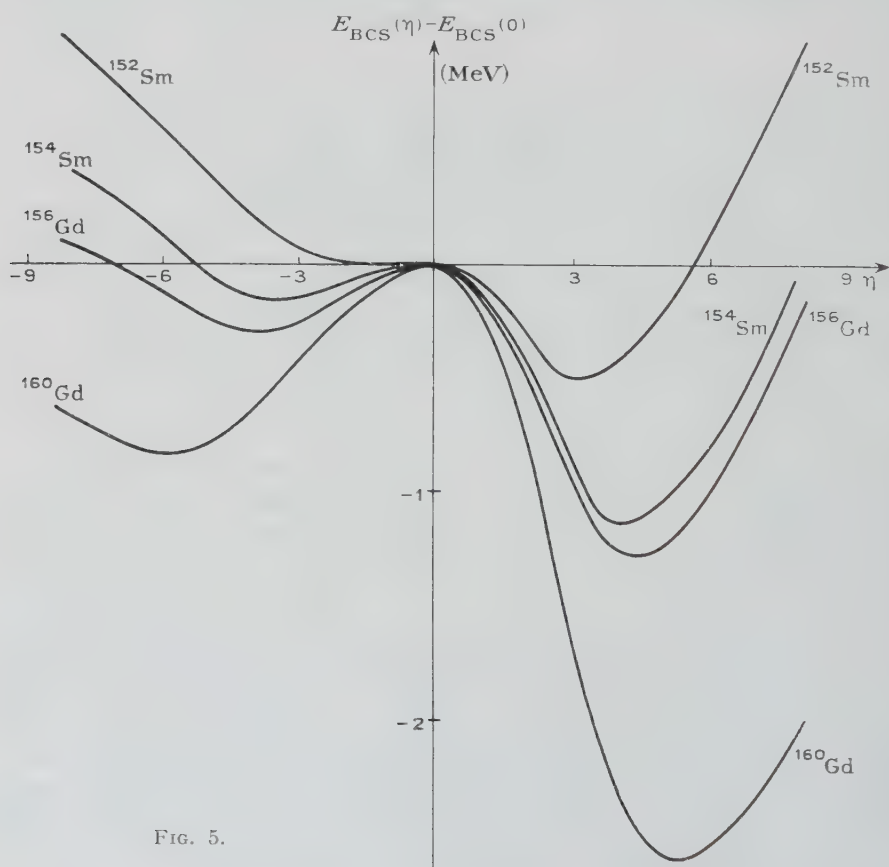


FIG. 5.

Une fois acquise la convergence de ces processus d'ajustement nous avons refait complètement les calculs précédents. L'accord est alors bien meilleur (fig. 5). La stabilité correspond maintenant à des valeurs de η plus grandes et surtout toutes positives. Les variations d'un noyau à l'autre des valeurs théoriques des moments

quadrupolaires issues de nos calculs suivent parfaitement celles des valeurs expérimentales. Nos valeurs sont toutefois en moyenne deux fois plus petites que les valeurs expérimentales. Nous pensons que ceci vient vraisemblablement du fait que le cœur ne peut prendre part dans notre formalisme au processus de déformation. Or, il est hautement improbable que le cortège des nucléons extérieurs au cœur puisse être fortement déformé sans que cela s'accompagne d'une polarisation du cœur. Ceci rejoint les conclusions de Mottelson [29] qui décrit la participation des couches complètes au processus électrique quadrupolaire comme une distorsion des couches complètes causée par le champ non sphérique produit par les nucléons extérieurs à ces couches complètes.

Suivant cette idée il est raisonnable de penser que dans la région qui nous intéresse la participation du cœur à la déformation puisse être du même ordre de grandeur que celle des nucléons extérieurs.

Pour vérifier cette supposition il faudrait appliquer notre formalisme à tous les nucléons du noyau sans exception. Ceci n'est réalisable que pour des noyaux beaucoup plus légers avec les calculateurs dont on dispose actuellement. K. Dietrich et H. J. Mang ont entrepris des calculs dans la région du ^{24}Mg ; les résultats auxquels ils aboutiront permettront de répondre à cette question.

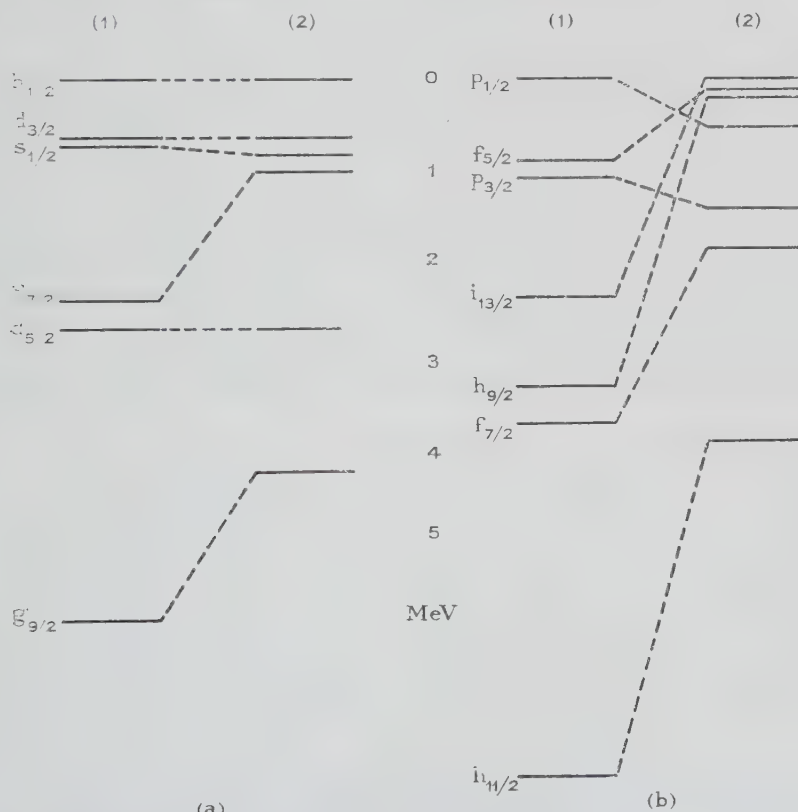


FIG. 6. — Energies de particules : a) protons ; b) neutrons. (1) Energies de Nilsson ; (2) énergies utilisées dans le calcul.

Nous avons consigné dans la figure 6 les valeurs des énergies de particule que nous avons déterminées de façon à rendre compte des niveaux du ^{207}Pb et du ^{207}Tl . Nous avons indiqué les valeurs correspondantes de ces énergies déduites du schéma de Nilsson afin de les comparer. On remarque immédiatement que les schémas des énergies de protons sont assez voisins. Nous avons, par contre, été obligé d'apporter de profondes modifications au schéma des énergies de neutrons.

On ne doit pas attacher de signification particulière au décalage dans les deux cas du niveau le plus bas $g_{9/2}$ pour les protons et $h_{11/2}$ pour les neutrons. La position de ces deux niveaux influe peu sur les résultats, les probabilités d'occupation V^2 qui leur sont attachées étant très grandes pourvu qu'ils soient situés suffisamment bas et varient peu avec la position adoptée. Nous les avons remontés arbitrairement à seule fin de conserver une valeur convenable à la séparation des niveaux $g_{7/2}$ et $g_{9/2}$ d'une part, $h_{9/2}$ et $h_{11/2}$ d'autre part.

Les autres modifications, importantes surtout du côté des neutrons, sont l'aboutissement des ajustements par tâtonnements que nous avons dû faire. Nous ne sommes pas en mesure d'affirmer avec certitude que ces schémas sont seuls susceptibles de conduire à des résultats raisonnables. On peut seulement affirmer que ce choix particulier répond à ce souci.

Ces énergies de particules correspondent aux valeurs suivantes des constantes de force : neutron-neutron — 0,3, proton-proton — 0,42 et neutron-proton — 4,5.

Nous avons indiqué au début de ce paragraphe la comparaison que nous avons faite des coefficients D d'essai à ceux provenant de la résolution simultanée des équations de Belyaev et de Hartree-Bogoliubov. Nous avons également comparé les valeurs des potentiels chimiques λ et des énergies de B. C. S. correspondant au minimum de la courbe $E(\eta)$.

Nous avons rassemblé les résultats concernant un noyau choisi au hasard dans le tableau III. Ceux-ci correspondent à une interaction du type δ - quadrupole avec une pondération $\alpha = 0,01$. Ces résultats, comme ceux qui sont rassemblés dans le tableau II, proviennent d'un même calcul avec $\eta = 1$.

Ici encore nous avons trouvé des valeurs extrêmement voisines, la seconde comparaison étant encore plus probante que celle du tableau II concernant les D .

TABLEAU III

	λ	$E_{\text{BCS}}(\eta_{\text{min}}) - E_{\text{BCS}}(0)$
Neutrons	— 5,72	— 33,98
	— 5,74	— 34,09
Protons	— 4,64	— 49,40
	— 4,61	— 49,16
Totaux		— 83,38
		— 83,25

Dans chaque case, le chiffre supérieur désigne la valeur obtenue avec l'ensemble des coefficients D d'essai, le chiffre inférieur désigne le résultat du traitement complet. Les énergies sont exprimées en mégaelectronvolts, l'énergie de la forme sphérique étant prise comme origine.

CONCLUSION

Nous avons développé parallèlement deux formalismes inspirés des méthodes de la théorie de la supraconductivité, le second se différenciant du premier par la conservation du nombre de particules. Nous avons appliqué le premier formalisme à l'étude de la déformation des noyaux situés dans une large région de la table nucléaire périodique centrée sur les terres rares et limitée par les lignes isotopiques 50 et 82 et par les lignes isotoniques 82 et 126. Les noyaux le plus léger et le plus lourd de la région sont respectivement le ^{132}Sn et le ^{208}Pb , tous deux doublement magiques. On définit un noyau de cette région par les nombres n de neutrons et z de protons qu'il possède en plus d'un cœur constitué de 70 neutrons et 40 protons. Le formalisme développé concerne les interactions résiduelles des $n + z$ « nucléons extérieurs ».

Les calculs issus du premier traitement conduisent à des résultats encourageants. En effet, il a été possible de déterminer des valeurs raisonnables des paramètres telles que l'allure générale de l'évolution de la forme d'équilibre en fonction de N et Z soit conforme aux prédictions de l'expérience. Précisons ces résultats : en se déplaçant dans le sens des n et z croissants depuis le ^{132}Sn ($n = 12$, $z = 10$) jusqu'au ^{208}Pb ($n = 56$, $z = 42$), on trouve tout d'abord une zone entourant le ^{132}Sn où tous les noyaux présentent une forme sphérique. Puis on note une soudaine et forte déformation prenant naissance vers le ^{150}Sm et atteignant son maximum aussitôt après le ^{160}Gd . Enfin, après un palier, une décroissance lente conduit à une nouvelle zone de sphéricité au voisinage du ^{208}Pb .

Le caractère soudain de l'apparition de la déformation que l'on trouve, comme on vient de le mentionner, au voisinage des Sm est le fait saillant de nos résultats. En effet, les calculs basés sur une sommation des énergies à une particule de Nilsson ne rendent pas compte de ce caractère particulier.

Ces résultats ne sont toutefois pas en accord quantitatif avec l'expérience. Rappelons ici les trois principales raisons permettant d'expliquer ce désaccord.

Tout d'abord le fait que nous considérons un cœur inerte sphérique est, selon toute vraisemblance, responsable des valeurs trop faibles que l'on trouve pour la déformation.

On a vu, en effet, que les moments quadrupolaires calculés étaient à peine supérieurs à la moitié des moments quadrupolaires expérimentaux. Est-il raisonnable de penser que la participation du cœur au processus de déformation permettrait de combler en grande partie cet écart ? L'étude des noyaux de la région du ^{24}Mg qui est poursuivie actuellement [21] et qui consiste à appliquer notre traitement à tous les nucléons du noyau permettra vraisemblablement de répondre à cette question, en extrapolant les résultats à la région des terres rares.

Ensuite, le fait que les énergies à une particule de la région étudiée sont mal connues, voire pour certaines totalement inconnues, nous a conduit à procéder par tâtonnements. L'imprécision des différences de masses pair-impair expérimentales que nous avons comparées aux énergies de quasi-particules, laisse un certain arbitraire dans le choix des énergies à une particule. Or, on a vu combien ces calculs peuvent être sensibles au choix de ces énergies. Il est à souhaiter que de nouvelles expériences puissent fournir des indications plus précises les concernant.

Enfin l'interaction simple choisie est peu réaliste et l'on est en droit d'espérer de meilleurs résultats avec une force à portée finie.

Il serait bien entendu intéressant de pouvoir procéder à la résolution simultanée des équations de Belyaev et de Hartree-Bogoliubov dans la région que nous avons étudiée en appliquant le formalisme au noyau entier, sans être contraint à une extrapolation. Ceci n'est pas réalisable avec les machines dont on dispose actuellement.

Des calculs ont été également entrepris en utilisant le second formalisme. On a pu ainsi étudier et comparer les résultats issus des deux formalismes, c'est-à-dire correspondant à la théorie de B. C. S. d'une part, à la théorie avec conservation du nombre de particules d'autre part. Cette comparaison a été faite en fonction du nombre de particules, de l'intensité de l'interaction d'appariement et du spectre de niveaux.

Nous ne donnons pas ces résultats en détail n'ayant pu participer personnellement à l'élaboration complète des calculs. Nous nous contenterons, pour compléter la présente étude, d'énumérer quelques-uns des caractères principaux de ces résultats [30].

On note tout d'abord que les erreurs dues à la non-conservation du nombre de particules ne dépendent pas beaucoup du type d'interaction choisi, mais principalement de l'intensité relative de la partie à courte portée de la force comparée à l'espacement des niveaux.

L'accord entre les résultats issus des deux voies est bon et dépend peu du nombre de paires. La théorie de B. C. S. surestime la dissolution de la surface de Fermi pour une interaction d'appariement forte, elle la sous-estime pour une interaction d'appariement faible.

Enfin les probabilités d'occupation pour des niveaux fortement occupés sont de loin plus précises que celles qui correspondent à des niveaux faiblement occupés. Ceci explique que les énergies totales diffèrent le plus souvent par des fractions de pour cent seulement.

C'est au titre d'Attaché de recherches au Centre National de la Recherche Scientifique que j'ai pu mener à bien ce travail.

Je tiens à rendre un très respectueux hommage à la mémoire de Mme I. Joliot-Curie et de Mr F. Joliot qui m'ont accueilli dans leur laboratoire. Je dois à Mr le Professeur M. Jean d'avoir pu y poursuivre mon initiation à la recherche sous sa direction. Ses conseils et ses encouragements m'ont été précieux pour la réalisation de ce travail. Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de ma profonde gratitude.

Ce travail a été commencé et développé dans sa plus grande partie, lors du séjour fructueux que j'ai effectué au Lawrence Radiation Laboratory, à Berkeley. Je remercie Mr le Professeur I. Pearlman pour sa généreuse hospitalité. Je dois beaucoup à Mr le Professeur J. O. Rasmussen qui a bien voulu m'intégrer au sein du groupe de théoriciens qu'il dirige, ce dont je le remercie vivement.

Je ne saurais faire ici la part de tout ce que je dois aux Drs K. Dietrich et H. J. Mang, de Heidelberg, également en séjour à Berkeley, avec qui ce travail a été effectué. Qu'ils soient assurés de mes plus vifs remerciements pour leur amicale

et féconde collaboration. Un projet de publication élaboré par K. Dietrich m'a été un guide précieux pour la rédaction du chapitre II.

Je remercie enfin les différents services qui ont assuré la présentation de cette thèse.

RÉFÉRENCES

- [1] J. P. ELLIOTT & A. M. LANE et S. A. MOSKOWSKI, *apud* Handbuch der Physik, éd. Springer, Berlin, 1957, t. **39**, p. 241 et 411.
- [2] Références données par D. J. THOULESS, The quantum mechanics of many-body systems, éd. Acad. Press, New York, 1961.
- [3] J. BARDEEN, L. N. COOPER & J. R. SCHRIEFFER, *Phys. Review*, t. **108**, 1957, p. 1175.
- [4] N. N. BOGOLIUBOV, *Ž. eksper. teor. Fiz.*, t. **34**, 1958, p. 73; *Nuovo Cim.* [10], t. **7**, 1958, p. 794.
- [5] J. G. VALATIN, *Nuovo Cim.* [10], t. **7**, 1958, p. 843.
- [6] A. BOHR, B. MOTTELSON & D. PINES, *Phys. Review*, t. **110**, 1958, p. 936.
- [7] S. T. BELYAEV, *K. Danske Vidensk. Selsk. mat.-fys. Medd.*, t. **31**, 1959, n° 11.
- [8] V. GILLET & N. VINH-MAU, *Phys. Letters*, t. **1**, 1962, p. 25.
- [9] V. GILLET, Thèse, Paris, 1962.
- [10] N. VINH-MAU, Thèse, Paris, 1962.
- [11] R. ARVIEU & M. VENERONI, *C. r. Ac. Sc.*, t. **250**, 1960, p. 992 et 2155.
- [12] M. KOBAYASI & T. MARUMORI, *Prog. theor. Physics*, t. **23**, 1960, p. 387.
- [13] M. BARANGER, *Phys. Review*, t. **120**, 1960, p. 957.
- [14] R. ARVIEU, Thèse, Paris, 1963.
- [15] R. ARVIEU, E. SALUSTI & M. VENERONI (à paraître).
- [16] R. ARVIEU & M. VENERONI, *Phys. Letters*, t. **5**, 1963, p. 142 ;
R. ARVIEU, E. BARANGER, M. VENERONI, M. BARANGER & V. GILLET, *Phys. Letters*, t. **4**, 1963, p. 119.
- [17] M. RHO, P. H. D. Thesis, UCRL Report 11 080.
- [18] J. O. RASMUSSEN, H. J. MANG, K. POGGENBURG, J. PRADAL & V. GILLET, UCRL Report 10 624, 1963.
- [19] B. F. BAYMAN, *Nuclear Physics*, t. **15**, 1960, p. 33.
- [20] A. K. KERMAN, R. D. LAWSON & M. H. MACFARLANE, *Phys. Review*, t. **124**, 1961, p. 162.
- [21] K. DIETRICH, H. J. MANG & J. PRADAL, Selfconsistent calculation of equilibrium deformations, *Nuclear Physics* (à paraître).
- [22] H. JEFFREYS & B. S. JEFFREYS, *Methods of mathematical physics*, Cambridge Univ. Press, 1956.
- [23] B. R. MOTTELSON & S. G. NILSSON, *K. Danske Vidensk. Selsk. mat.-fys. Skr.*, t. **1**, 1959, n° 8.
- [24] B. R. MOTTELSON & S. G. NILSSON, *Phys. Review*, t. **99**, 1955, p. 1615.
- [25] S. G. NILSSON, *K. Danske Vidensk. Selsk. mat.-fys. Medd.*, t. **29**, 1955, n° 16.
- [26] E. MARSHALEK, L. W. PERSON & R. K. SHELINE, *Rev. mod. Physics*, t. **35**, 1963, p. 1.
- [27] J. H. E. MATTAUCH & A. H. WAPSTRA, *Nuclear Physics*, t. **31**, 1962, p. 1 ; Nuclear data sheets, U. S. Government Printing Office, Washington, 1960.
- [28] L. S. KISSLINGER & R. A. SORESENSEN, *K. Danske Vidensk. Selsk. mat.-fys. Medd.*, t. **32**, 1960, n° 9.
- [29] B. R. MOTTELSON, Le problème à N corps, Cours des Houches, 1958, p. 283.
- [30] K. DIETRICH, H. J. MANG & J. H. PRADAL, UCRL Report 11 083, 1963.

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

Hypernoyaux multiples

Vu et approuvé :

Paris, le 11 mai 1964

Le Doyen de la Faculté des Sciences

Marc ZAMANSKY

Vu et Permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

Jean ROCHE

M. JULIA	T Etudes des Moléculaires complexes.	CHEVAUGEON	T Botanique (Orsay).
LENDER	T Biol. Animale SPCN (Orsay).	KAHANE	T Mathématiques (Orsay).
MAGAT	T Physico-Chimie des radioéléments.	SAMUEL	T Mathématiques ENS féminines.
M ^{lle} QUINTIN	T Electrochimie.	KOURGANOFF	T Astronomie (Orsay).
MONOD	T Chimie du métabolisme.	THIRY	T Mécanique céleste.
BENOIT	T Physiol. animale (Orsay).	ABELES	T Physique SPCN.
DE POSSEL	T Analyse numérique.	AMAT	T Physique PCB.
CHARLOT	T Chimie analytique.	AUBOIN	T Géologie.
LEMEE	T Ecologie Vég. (Orsay).	M ^{me} BENOIT-GUEU-TAL	T Phys. Nucléaire et radioactivité (Orsay).
GUERIN	T Chimie MPC (Orsay).	BOUGIS	T Biologie marine (Villefranche/Mer).
CHATELET M.	T Chimie PCB.	BRUHAT	T Mathématiques MPC.
JEAN	T Physique Nucl. (Orsay).	BRUNN	T Géologie historique (Orsay).
MATTLER	T Physique SPCN.	CHABBAL	T Physique MGP (Orsay).
BERGERARD	T Zoologie (Orsay).	DEHEUVELS	T Mathématique Propé.
BERTHEIN	T Electronique (Orsay).	D'ESPAGNAT	T Physique théorique (Orsay).
BOUSSIÈRES	T Radiochimie.	FURON	T Géologie SPCN.
M ^{me} COUTURE	T Thermo. et Méca. Physique.	M ^{me} GANS	T Génétique.
ELLENBERGER	T Géologie des grandes régions du globe.	GENEVES	T Biologie végétale PCB.
FRANC	T Biologie animale PCB.	GUILBERT	T Physique (CUS Orléans).
SCHNELL	T Botanique tropicale.	HUPE	T Pétrographie.
STOLKOWSKI	T Physiologie végétale.	HOLLANDE	T Biologie générale.
ACHER	T Chimie Biologique.	LIONS	T Analyse numérique.
BAUDOIN	T Biologie animale PCB.	MAITTE	T Chimie PCB.
BEAUMONT	T Biologie animale SPCN.	MEYER	T Physique propédeutique.
BLAMONT	T Géophysique-ionosphère.	NICOLAS	T Géologie appliquée.
BOURREAU	T Botanique.	PANIGEL	T Biologie générale.
CURIE D.	T Physique MGP.	RAVIER	T Pétrographie.
DURAND-DELGA ..	T Géologie.	ROSEAU	T Méca. théor. des fluides.
FREON	T Chimie organique (Orsay).	ROUBINE	T Electronique.
HELLER	T Physiol. végétale.	SILBER	T Chimie PCB.
TORTRAT	T Calcul des Probabilités.	UEBERSFELD	T Electronique.
CAILLEUX	T Géologie (SPCN).	YVON	T Théories Physiques.
MAGNAN	T Physique SPCN.	HERVE	T Mathématiques.
DAUDEL	T Mécanique ondulatoire appl. à la chimie Théor. et à la Phys. Nucléaire.	NERON	T Mathémat. MPC (Orsay)
M ^{lle} FOURCROY ...	T Biologie végét. SPCN.	M ^{me} PECKER-WI-MEL	T Astrophysique.
M ^{me} CHOQUET-BRUHAT	T Mécan. Analytique et Méca. céleste.	BALKANSKY	T Physique MPC.
M ^{lle} VEIL	T Physiologie générale.	LE CORRE	T Electricité.
LWOFF	T Microbiologie.	DELCROIX	T Physique théorique (Orsay).
SIESTRUNCK	T Mécan. Phys. et Expér. im.	GOURDIN	T Phys. Théor. des Hautes-Energies (Orsay).
LACOMBE	T Métallurgie des métaux Nucléaires (Orsay).	LEHMANN	T Phys. Exp. des Hautes Energies (Orsay).
BROCHARD	T Physique PCB (Orsay).	NATAF	T Physique nucléaire et radioactivité (Orsay).
CABANNES	T Mécanique générale.	ECHALIER	T Biologie animale PCB.
LESIEUR	T Mathématiques I (Orsay).	BARRAUD	T Physiologie cellulaire.
MAZET	T Méca. générale (Orsay).	LIORÉ	T Physiologie végét. Orsay.
CAIRE	T Géographie phys. et Géol. Dynamique.	DARS	T Géologie struc. et Géol. appliquée.
COMOLET	T Mécanique des Fluides.	CAMEFORT	T Botanique (agrégation).
CORABOEUF	T Physiol. animale (Orsay).	VICHNIEWSKY	T Mécanique industrielle.
DELLOUE	T Physique de l'exosphère.	BLAQUIÈRE	T Electronique (Orsay).
GORENFLOT	T Botanique II (Orsay).	ARNOUS	T Physique théorique.
HOULLON	T Biologie animale PCB.	TATIBOUET	T Chimie (CSU Orléans).
JULIEN J.	T Chimie SPCN (Orsay).	MALLIAVIN	T Mathématique propé. Orsay.
MALGRANGE	T Technique Math. de la Physique (Orsay).	GAUDEMAR	T Chimie Propé.
OLIVIER	T Antropologie.	PEREZ Y JORBA	T Phys. Exp. des Hautes énergies (Orsay).
NOZERAN	T Botanique II (Orsay).	DAVID	T Chimie (Agrég. Orsay).
BLANC-LAPIERRE ..	T Phys. ENS (Orsay).	BROUSSE	T Mécanique théorique.
		ROSCH	T Astronomie.

Le Secrétaire Général..... R. POULLAIN.

